

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Mathématiques

Algèbre et géométrie

PSI

Cours
Méthodes
Exercices résolus

D. GUININ • B. JOPPIN

Nouveau programme

Bréal
L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Copyright Bréal

Copyrighted material

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Algèbre et géométrie

PSI

Daniel GUININ

Professeur en classes préparatoires scientifiques - 2e année

Bernard JOPPIN

Professeur en classes préparatoires scientifiques - 1re année

1, rue de Rome - 93561 Rosny-sous-Bois cedex

Bréal éditions

Copyrighted material

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Titres disponibles dans la filière PSI

Mathématiques 2e année

- Analyse PSI
- Algèbre et géométrie PSI

Physique 2e année

- Mécanique des fluides PC - PSI
- Électromagnétisme PC - PSI
- Physique des ondes PC - PSI
- Électrotechnique PSI
- Électronique PSI
- Optique MP - PC - PSI - PT
- Thermodynamique PC - PSI

Chimie 2e année

- Chimie PSI

Exercices 2e année

- Mathématiques PC - PSI
- Physique PSI

Maquette : Insolencre & 16 iS.
Couverture : Sophie Martinet.
Réalisation : 16 iS.

© Bréal 2004
Toute reproduction même partielle interdite.
ISBN 2 7495 0393 0

Copyrighted material

Cet ouvrage est conforme aux **nouveaux programmes** mis en place à compter de la rentrée 2004.

Il est à noter que les programmes de PSI et PSI* sont identiques.

Les Nouveaux Précis Bréal sont le reflet d'une évolution des habitudes de travail des étudiants en prépas scientifiques PSI ou PSI*.

Rigueur, méthode et clarté sont sans doute les leitmotivs de cette évolution. La mise en page et l'apport de couleur accompagnent, en la soulignant, la structure du contenu divisé en trois parties complémentaires :

- Le **Cours** est composé des définitions, théorèmes et propriétés nécessaires et suffisants. L'objectif est clair : tout le programme, rien que le programme. Tous les théorèmes, ainsi que les principales propriétés, sont démontrés en détail. Parfois, une démonstration simple à établir pourra faire l'objet d'un premier exercice d'application stimulant.

- Les **Méthodes** constituent un point important des Nouveaux Précis. Étudiants et professeurs savent combien le plus délicat, lorsque l'on aborde un problème, est souvent la phase de démarrage : *par quel bout le prendre ?* Deux temps composent cette nouvelle rubrique.

  L'essentiel explicite, en une fiche de synthèse, les démarches les plus courantes. Des mises en œuvre illustrent ces démarches par des exercices classiques, voire «incontournables».

- Les **Exercices**, toujours aussi nombreux que dans les éditions précédentes, sont classés selon leur degré de difficulté : du niveau 1, qui correspond à des exercices souvent proches du cours, au niveau 3, moins «transparents». Le niveau 2 propose des sujets de colles raisonnables.

  Dans tous les cas, ces exercices sont calibrés en fonction de ce que l'on peut véritablement attendre d'un étudiant en vue de la préparation immédiate des concours.

  Les indications apportent un coup de pouce qui peut être bienvenu lorsque l'on travaillle seul.

  Tous les exercices ont une solution, détaillée ou plus succincte.

Il nous a paru indispensable d'accorder à ces deux dernières parties, les Méthodes et les Exercices, une place importante, équivalente à celle du Cours, au fil des sept chapitres que comporte ce tome consacré à l'algèbre et à la géométrie. Cet équilibre permettra aux étudiants de PSI ou PSI* de disposer d'un outil de travail complet, adapté au rythme progressif et soutenu de la préparation aux concours.

Les auteurs

Avant-propos

This One
FZEY-UT3-F9U6
Copyrighted IT

Sommaire

1. Espaces vectoriels – Applications linéaires

A. $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\mathbb{K}$-algèbres 8
B. Applications linéaires 13
C. Familles libres, génératrices – Bases – Dimension . 15
D. Somme de sous-espaces vectoriels 18
E. Rang d'une application linéaire 27
F. Dual d'un espace vectoriel – Formes linéaires – Hyperplans 30

Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre 35
Énoncés des exercices 46
Solutions des exercices 50

2. Calcul matriciel – Systèmes linéaires

A. Formulaire de calcul matriciel 62
B. Matrices semblables. – Matrices équivalentes – Rang 65
C. Opérations élémentaires 68
D. Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme . 72
E. Systèmes d'équations linéaires 74

Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre 79
Énoncés des exercices 84
Solutions des exercices 87

3. Déterminants

A. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ 94
B. Applications p-linéaires 99
C. Formes n-linéaires alternées. Déterminant dans une base 101
D. Déterminant d'un endomorphisme 106
E. Déterminant d'une matrice carrée 107
F. Développement d'un déterminant suivant une colonne ou une ligne 111
G. Systèmes linéaires de Cramer 115

Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre 116
Énoncés des exercices 129
Solutions des exercices 134

4. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

A. Sous-espaces stables 150
B. Polynômes d'un endomorphisme 152
C. Éléments propres d'un endomorphisme 155
D. Éléments propres d'une matrice carrée 159
E. Réduction en dimension finie 161
F. Applications de la réduction 170

Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre 175
Énoncés des exercices 183
Solutions des exercices 186

Copyrighted material

Sommaire

5. Espaces préhilbertiens

A. Formes bilinéaires symétriques – Formes quadratiques 196
B. Espaces préhilbertiens réels 205
C. Espaces préhilbertiens complexes 208
D. Orthogonalité 212

Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre 225
Énoncés des exercices 234
Solutions des exercices 237

6. Espaces euclidiens

A. Structure d'espace euclidien 250
B. Extension aux espaces hermitiens 253
C. Adjoint d'un endomorphisme Endomorphismes remarquables 254
D. Espaces euclidiens de dimension 2 ou 3 268

Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre 277
Énoncés des exercices 287
Solutions des exercices 291

7. Coniques – Quadriques

A. Réduction de l'équation d'une conique 304
B. Quadriques 308

Énoncés des exercices 318
Solutions des exercices 320

INDEX 329
Notations usuelles 334

Copyright

Copyrighted material

CHAPITRE 1

Espaces vectoriels Applications linéaires

A. $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\mathbb{K}$-algèbres . . . 8
1. Définitions, règles de calcul et exemples . . . 8
2. Sous-espaces vectoriels, sous-algèbres . . . 10
B. Applications linéaires . . . 13
1. Définitions et propriétés . . . 13
2. Morphismes de $\mathbb{K}$-algèbres . . . 13
3. Image – Noyau . . . 13
4. $\mathcal{L}(E, F) - \mathcal{L}(E) - \mathrm{GL}(E)$ . . . 14
C. Familles libres, génératrices – Bases – Dimension . . . 15
1. Combinaisons linéaires . . . 15
2. Familles génératrices . . . 15
3. Familles libres, liées . . . 15
4. Bases . . . 16
5. Coordonnées . . . 16
6. Dimension finie . . . 17
D. Somme de sous-espaces vectoriels . . . 18
1. Somme, somme directe de deux sous-espaces . . . 18
2. Codimension . . . 19
3. Projecteurs et involutions linéaires . . . 20
4. Somme de n sous-espaces . . . 21
5. Polynômes d'interpolation de Lagrange . . . 26
E. Rang d'une application linéaire . . . 27
1. Théorème du rang . . . 27
2. Endomorphismes nilpotents . . . 29
F. Dual d'un espace vectoriel – Formes linéaires – Hyperplans . . . 30
1. Formes linéaires – Hyperplans . . . 30
2. Dimension finie . . . 31

Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre . . . 35

Énoncés des exercices . . . 46

Solutions des exercices . . . 50

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps des complexes ou le corps des réels : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

Définitions ou propriétés vues en première année sont rappelées à titre de formulaire. (1)

Le calcul matriciel, vu en PCSI ou MPSI n'est pas repris en deuxième année. (2)

(1) Celles-ci pourront être trouvées dans le tome Algèbre – Géométrie MPSI ou PCSI.

(2) On trouvera des rappels en début de chapitre II.

A. $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\mathbb{K}$-algèbres

1. Définitions, règles de calcul et exemples

1.1 – Espaces vectoriels

Définition 1

Un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** (3) ou **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** est un triplet $(E, +, \cdot)$ formé :

- d'un ensemble E non vide dont les éléments sont appelés **vecteurs**,
- d'une opération dans E, notée $+$, telle que $(E, +)$ soit un groupe commutatif,
- d'une loi de composition externe sur E, à opérateurs dans $\mathbb{K}$, (4)

notée $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$, (5) qui vérifie les propriétés suivantes :

(1) elle est distributive par rapport à la somme des scalaires :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

(2) elle est distributive par rapport à la somme des vecteurs :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

(3) on a l'associativité mixte :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$$

(4) 1 est opérateur neutre :

$$\forall x \in E, \quad 1 \cdot x = x$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est plus simplement noté E.

(3) En abrégé : $\mathbb{K}$-e-v.

(4) C'est une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E.

(5) Usuellement, on note λx au lieu de $\lambda \cdot x$.

Espace vectoriel produit

Soit $E_1, \ldots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $E = E_1 \times \ldots \times E_n$. On munit E

a) de l'addition définie par $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

b) du produit externe défini par $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n)$ où

$(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)$ sont des éléments quelconques de E et λ est dans $\mathbb{K}$.

Avec ces lois, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Conséquences

$\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel,

$\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. C'est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Espace vectoriel de fonctions

Soit A un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On munit l'ensemble E^A des applications de A dans E d'une addition et d'un produit externe définis par :

la somme $f + g$ d'éléments de E^A est l'application $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$

pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in E^A$, le produit $\lambda \cdot f$ est l'appplication $\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda f(x)$

Muni de ces lois, E^A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Copyrighted material

Conséquences

1) L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles muni de l'addition et du produit par un réel usuels :
   - $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$, • du produit par un réel : $\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$

   est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2) L'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes est, pour les opérations usuelles d'addition et de produit par un complexe (resp. par un réel), un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (resp. un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).
3) L'ensemble $\mathbb{R}^I$ des fonctions réelles définies sur une partie I de $\mathbb{R}$ est, pour les opérations usuelles d'addition et de produit par un réel, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Règles de calcul dans un espace vectoriel

$(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,

- $\forall x \in E,\ 0 \cdot x = 0_E \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot 0_E = 0_E$
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ \lambda \cdot x = 0_E \Rightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)$
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$
- $\forall (\lambda, \mu, x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E \times E,$
  $\lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y \qquad (\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$
- $\forall (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p,\ \forall (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant q} \in E^q,\ \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right) \cdot \sum_{j=1}^{q} x_j = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i x_j$

1.2 – Espace vectoriel et anneau : $\mathbb{K}$-algèbre

Exemples de $\mathbb{K}$-algèbres

1) L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites sur $\mathbb{K}$ muni :
   - de l'addition usuelle de deux suites,
   - du produit d'une suite par un scalaire,
   - du produit usuel de deux suites : $(x_n)(y_n) = (x_n y_n)$

   est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et un aneau commutatif dont l'élément unité est la suite constante égale à 1.
2) L'ensemble $\mathbb{R}^I$ des applications de I dans $\mathbb{R}$ muni :
   - de l'addition usuelle de deux fonctions,
   - du produit d'une fonction par un scalaire,
   - du produit usuel de deux fonctions,

   est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau commutatif dont l'élément unité est la fonction constante égale à 1.
3) Dans l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit de manière unique $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$ où la suite des coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

   Les opérations usuelles sur $\mathbb{K}[X]$ sont :
   - l'addition : $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n + \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) X^n$
   - la multiplication par un scalaire : $\lambda \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda a_n X^n$
   - le produit : $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n\right)\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) X^n$

   Muni de ces trois opérations, $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et un anneau commutatif.

   L'élément unité est le polynôme constant 1.

Ces exemples s'insèrent dans un contexte général qui est défini ci-après.

Copyrighted material

Définition 2

Une $\mathbb{K}$-**algèbre** [6] est un quadruplet $(A, +, \cdot, \times)$ tel que :

(1) $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,

(2) $(A, +, \times)$ est un anneau, [7]

(3) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x, y) \in A^2,\ \lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$

Une $\mathbb{K}$-algèbre $(A, +, \cdot, \times)$ est **commutative** quand l'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif. [8]

S'il n'y a pas d'ambiguïté, la $\mathbb{K}$-algèbre $(A, +, \cdot, \times)$ est plus simplement notée A.

[6] ou **algèbre** sur $\mathbb{K}$.

[7] Usuellement, on note xy au lieu de $x \times y$.

[8] C'est-à-dire lorsque la multiplication interne $\times$ est commutative.

Remarques

1) Dans les trois exemples, le produit (externe) par un scalaire n'est autre que le produit (interne) par une suite constante, ou par une fonction constante, ou par un polynôme constant.

2) $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre : les deux multiplications, l'interne et l'externe, coïncident.
$\mathbb{C}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre, mais aussi une $\mathbb{R}$-algèbre.

Règles de calcul dans une $\mathbb{K}$-algèbre

$(A, +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre d'unité 1_A.

- $\forall (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p,\ \forall (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in A^p,\ \forall (\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant q} \in \mathbb{K}^q,\ \forall (y_j)_{1 \leqslant j \leqslant q} \in A^q$:

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{q} \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i \mu_j (x_i \times y_j)$$

- Si x, y commutent dans A : $xy = yx$, alors $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. [9]

[9] Avec par convention $\forall u \in A,\ u^0 = 1_A$.

2. Sous-espaces vectoriels, sous-algèbres

2.1 – Sous-espaces vectoriels

$(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 3

Une partie F de E est un **sous-espace vectoriel** de E lorsque :

a) $F \neq \varnothing$,

b) F est stable pour l'addition $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$,

c) F est stable pour le produit externe $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F,\ \lambda \cdot x \in F$.

Remarques

- Tout sous-espace vectoriel de E contient 0_E.
- E et $\{0_E\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E. [10]
- Étant donné $a \in E$, le sous-ensemble $\mathbb{K} \cdot a = \{\lambda \cdot a \ /\ \lambda \in \mathbb{K}\}$ est un sous-espace vectoriel de E. On a $\mathbb{K} \cdot 0_E = \{0_E\}$.
Si $a \neq 0_E$, le sous-espace $\mathbb{K} \cdot a$ est appelé la **droite vectorielle** engendrée par a.

[10] $\{0_E\}$ est le **sous-espace nul** de E.

Théorème 1

Étant donné un sous-espace vectoriel F de $(E, +, \cdot)$,

a) Les lois de composition interne et externe de E induisent des lois de composition interne et externe sur F

b) et, pour ces lois induites, F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque pratique

Le principal intérêt de ce théorème est de montrer de façon économique que l'on est en présence d'un espace vectoriel, en mettant en évidence, si c'est possible, une structure de sous-espace vectoriel.

Copyrighted material

Exemples

1) I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K}^I$ [11] est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   - $\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ (ou $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$) ensemble des applications continues de I dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$. $\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   - $\mathscr{D}^1(I,\mathbb{K})$ ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$ dérivables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$. $\mathscr{D}^1(I,\mathbb{K})$ est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   - $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{K})$, $k \geqslant 1$, ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$, k fois continûment dérivables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}^1(I,\mathbb{K})$. $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{K})$ est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   Pour tout $k \geqslant 1$, $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^{k-1}(I,\mathbb{K})$.
2) L'ensemble $\mathscr{B}(\mathbb{K})$ des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. $\mathscr{B}(\mathbb{K})$ est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
3) Si (u_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \,/\, u_n \neq 0\}$ en est le <u>support</u>.
   Une suite est dite <u>presque nulle</u> si son support est une partie majorée (donc finie) de $\mathbb{N}$.
   On note $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites presque nulles d'éléments de $\mathbb{K}$.
   $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
   Donc, l'ensemble $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ des suites presque nulles de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

[11] Ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$.

Théorème 2

$F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si
$$F \neq \varnothing \text{ et } \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x,y) \in F^2,\ \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F.$$

Remarque

Dans un contexte de sous-espaces vectoriels, on étudie l'appartenance de 0_E à F :
- $0_E \in F$ donne $F \neq \varnothing$.
- $0_E \notin F$, alors F n'est pas sous-espace de E.

Exemple 1 La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace de E si et seulement si l'un d'eux est inclus dans l'autre.

Soit F et G des sous-espaces vectoriels de E.
1) Si $F \subset G$, $F \cup G = G$ et $F \cup G$ est un sous-espace de E.
2) Si $F \not\subset G$, il existe $f \in F \setminus G$ et si $G \not\subset F$, il existe $g \in G \setminus F$.
   Alors $f + g \notin F \cup G$. En effet, supposons par exemple que $f + g \in G$.
   En posant $g' = f + g$, on a alors $f = g' - g$, avec $g \in G$ et $g' \in G$ et donc $f \in G$, contrairement au choix de $f \in F \setminus G$.
   $F \cup G$ n'est donc pas stable pour l'addition et ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 1

Étant donné une famille $(F_i)_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels de E, l'intersection $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 4

Étant donné une partie $A \subset E$, l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A est [12] le plus petit sous-espace vectoriel contenant A.
On l'appelle le **sous-espace vectoriel engendré par** A, et on le note $\mathrm{Vect}(A)$.

[12] Pour la relation d'ordre définie par l'inclusion.

Remarquons que $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$.
A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\mathrm{Vect}(A) = A$.

Méthode

Pour montrer qu'une partie B de E est le sous-espace vectoriel engendré par une partie A, on pourra prouver successivement :
(1) $A \subset B$,
(2) B est un sous-espace vectoriel de E,
(3) si un sous-espace vectoriel F de E contient A alors il contient B.
Avec **(1)** et **(2)**, B est élément de la famille des sous-espaces vectoriels de E contenant A.
Alors **(3)** montre que B est le plus petit élément de cette famille.

Copyrighted material

Exemple 2 Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites presque nulles d'éléments de $\mathbb{K}$.

On pose : $B = \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i x_i \,/\, (\lambda_i)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \right\}$. Montrons que $B = \text{Vect}(X)$.

(1) B contient X.

En effet, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $(\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ définie par ($\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$) [13] appartient à $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ et on a $\sum_{j\in\mathbb{N}} \delta_{ij} x_j = x_i$ donc $x_i \in B$.

[13] Symbole de Kronecker.

(2) B est un sous-espace vectoriel de E.

En effet, pour $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i x_i$, $(\lambda_i)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ et $y = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i x_i$, $(\mu_i)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$

quels que soient α et β dans $\mathbb{K}$, la suite $(\alpha\,\lambda_i + \beta\,\mu_i)_{\mathbb{N}}$ est presque nulle et on a :

$$\alpha x + \beta y = \sum_{i\in\mathbb{N}} (\alpha\,\lambda_i + \beta\,\mu_i) x_i$$

(3) Si un sous-espace vectoriel F de E contient X alors il contient B.

En effet, si F contient X, pour tous scalaires $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \cdots, \lambda_{i_p}$, F contient :

$$\lambda_{i_1} x_{i_1} + \lambda_{i_2} x_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_p} x_{i_p}$$

Application

Dans $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ on considère les suites $D_n = (\delta_{ni})_{i\in\mathbb{N}}$ et $D = \{D_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$. [14]

$\text{Vect}(D)$ est le sous-espace $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ des suites presque nulles.

[14] C'est une partie de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.

2.2 – Sous-algèbres

Définition 5

Si $(A, +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, $B \subset A$ est appelée une **sous-algèbre** de A lorsque :

(1) $(B, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(A, +, \cdot)$.

(2) $(B, +, \times)$ est un sous-anneau de $(A, +, \times)$. [15]

[15] Toute sous-algèbre de A contient 0_A et 1_A (unité de l'anneau).

Propriété 2

Étant donné une sous-algèbre B de $A(+, \cdot, \times)$,

a) les lois de composition interne et externe de A induisent des lois de composition interne et externe de B,

b) pour ces lois induites, B est une $\mathbb{K}$-algèbre. [16]

[16] Comme dans le cas des sous-espaces vectoriels, on dispose d'une méthode économique pour mettre en évidence une structure de $\mathbb{K}$-algèbre.

Théorème 3

$B \subset A$ est une sous-algèbre de A si et seulement si :

(1) $\forall (x, y) \in B^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda x + \mu y \in B$

(2) $\forall (x, y) \in B^2,\ x \times y \in B$

(3) $1_A \in B$.

☞ **(3)** donne $B \neq \emptyset$ et avec **(1)**, $(B, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(A, +, \cdot)$. $(B, +)$ est donc en particulier un sous-groupe de $(A, +)$ et compte tenu de **(2)** et **(3)**, $(B, +, \times)$ est un sous-anneau de $(A, +, \times)$.

Propriété 3

Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille de sous-algèbres de A. Alors $\bigcap_{i\in I} B_i$ est une sous-algèbre de A. [17]

[17] On vérifie les trois hypothèses du théorème précédent.

Définition 6

Étant donné $P \subset A$, l'intersection de toutes les sous-algèbres de A qui contiennent P est la plus petite [18] sous-algèbre de A contenant P.

On l'appelle la sous-algèbre de A engendrée par P.

[18] Pour la relation d'ordre définie par l'inclusion.

Copyrighted material

B. Applications linéaires

Dans cette partie, E et F sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

1. Définitions et propriétés

- Étant donné des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, une application f de E dans F est appelée une **application linéaire** ou morphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels lorsque :

a) $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$

b) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

- Un **isomorphisme** d'espaces vectoriels est une application linéaire bijective.
- Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans E.
- Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif.
- $\mathscr{L}(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires de E dans F

$E \simeq F$ exprime qu'il existe un isomorphisme de E vers F.

$\mathrm{Isom}(E, F)$ est l'ensemble des isomorphismes de E vers F.

- $\mathscr{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E.

$\mathrm{Aut}(E)$ est l'ensemble des automorphismes de E.

- Étant donné $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $f(0_E) = 0_F$, $\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)$
- Une application f de E dans F est linéaire si et seulement si

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K},\ \forall (x, y) \in E^2,\ f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$$

2. Morphismes de $\mathbb{K}$-algèbres

Soit $(A, +, \times, \cdot)$ et $(A', +, \times, \cdot)$ des $\mathbb{K}$-algèbres.

Définition 7

Un morphisme d'algèbres de $(A, +, \times, \cdot)$ dans $(A', +, \times, \cdot)$ est une application de A dans A' qui est à la fois

- un morphisme d'anneaux de $(A, +, \times)$ dans $(A', +, \times)$
- et une application linéaire de $(A, +, \cdot)$ dans $(A', +, \cdot)$.

Si f est un morphisme d'algèbres de $(A, +, \times, \cdot)$ dans $(A', +, \times, \cdot)$, alors $f(1_A) = 1_{A'}$

$\forall (a, b) \in A^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},$

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \qquad f(ab) = f(a)f(b) \qquad f(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot f(a)$$

3. Image – Noyau

Dans ce paragraphe, f est un élément de $\mathscr{L}(E, F)$.

- **Image d'un sous-espace**

Étant donné un sous-espace vectoriel A de E, l'ensemble $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.

- $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé l'**image** de f et noté $\mathrm{Im}\, f$.
- **Image réciproque d'un sous-espace**

Soit B un sous-espace vectoriel de F. L'image réciproque $f^{-1}(B)$ de B par f est un sous-espace vectoriel de E.

- Le sous-espace vectoriel $f^{-1}(0_F)$ est appelé le **noyau** de f. On le note $\mathrm{Ker}\, f$.

Théorème 4

Une application linéaire f de E dans F est injective si et seulement si son noyau est le sous-espace nul de E.

Copyrighted material

4. $\mathscr{L}(E,F)$ – $\mathscr{L}(E)$ – GL(E)

4.1 – Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$, $\mathbb{K}$-algèbre $\mathscr{L}(E)$

Théorème 5

Étant donné des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, l'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F est un sous-espace vectoriel de $\left(F^E,+,\cdot\right)$.

Théorème 6

Composée d'applications linéaires
Soit E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels,
Si on a $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $g\in\mathscr{L}(F,G)$, alors $g\circ f$ est dans $\mathscr{L}(E,G)$.

Théorème 7

Étant donné $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $g\in\mathscr{L}(F,G)$,
a) $\operatorname{Im} g\circ f\subset\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} g\circ f\supset\operatorname{Ker} f$
b) $g\circ f=0\iff\operatorname{Im} f\subset\operatorname{Ker} g$

Théorème 8

$\mathbb{K}$-algèbre $\mathscr{L}(E)$.
Muni de la somme d'applications, du produit d'une application par un scalaire et de la composition d'applications, $(\mathscr{L}(E),+,\cdot,\circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. ✎ (19)

✎ (19) Non commutative en général.

- Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. On pose $f^0=\mathrm{Id}_E$, $f^1=f$, et pour $n\in\mathbb{N}$, $f^{n+1}=f^n\circ f$.
  Les endomorphismes f^n, avec $n\in\mathbb{N}$, sont les **itérés** de f.
  Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$, $f^n\circ f^p=f^p\circ f^n=f^{n+p}$.
- $f\in\mathscr{L}(E)$ est dit **nilpotent** lorsque l'un de ses itérés est l'endomorphisme nul sur E.
  Si $f^n=0$, pour tout $p\geqslant 0$, $f^{n+p}=0$.

Exemple 3 Exemples de calculs dans $\mathscr{L}(E)$. Avec f et g éléments de $\mathscr{L}(E)$:

1) $(\mathrm{Id}_E-3f)^2=\mathrm{Id}_E-6f+9f^2$ 2) $(f+g)^2=f^2+f\circ g+g\circ f+g^2$
3) $(f-g)\circ(f+g)=f^2-g^2+f\circ g-g\circ f$
4) $f^2-5f+6\,\mathrm{Id}_E=(f-3\,\mathrm{Id}_E)\circ(f-2\,\mathrm{Id}_E)=(f-2\,\mathrm{Id}_E)\circ(f-3\,\mathrm{Id}_E)$

Exemple 4 Exemple d'endomorphisme nilpotent.
Considérons l'espace vectoriel $E=\mathbb{K}_n[X]$ et l'endomorphisme D, dérivation de polynômes.
Pour tout $P\in\mathbb{K}_n[X]$, $D^{n+1}(P)=0$, donc $D^{n+1}=0$, ce qui montre que D est nilpotent.
Puisque $D^n(X^n)=n!$, on a $D^n\neq\theta_E$; on dit que D est d'indice $n+1$.

4.2 – GL(E)

Théorème 9

Isomorphisme réciproque
Étant donné des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, et un isomorphisme f de E vers F, l'application f^{-1} de F dans E est linéaire.

Théorème 10

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(\mathrm{Aut}(E),\circ)$ est le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$, appelé le **groupe linéaire** de E, noté GL(E).

Exemple 5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u\in\mathscr{L}(E)$ tel que $u^5=0$. Montrons que Id_E+u est un automorphisme.
On pourra exprimer son inverse à l'aide d'une somme d'itérés de u.
$\mathrm{Id}_E=\mathrm{Id}_E^5+u^5=(\mathrm{Id}_E+u)\circ(\mathrm{Id}_E-u+u^2-u^3+u^4)=(\mathrm{Id}_E-u+u^2-u^3+u^4)\circ(\mathrm{Id}_E+u)$
montre que Id_E+u est inversible et que son inverse est $\mathrm{Id}_E-u+u^2-u^3+u^4$.

Copyrighted material

C. Familles libres, génératrices Bases – Dimension

[20] On rappelle ici l'essentiel de ce qui a été vu en Algèbre – Géométrie, MPSI ou PCSI.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. [20]

1. Combinaisons linéaires

1.1 – Familles d'éléments de E

- Une **famille** d'éléments de E indexée par un ensemble I est une application de I dans E. [21]

[21] On la note, par exemple, $(c_i)_{i\in I}$.

L'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I est E^I.

Une famille $(c_i)_{i\in I}$ est dite finie lorsque I est un ensemble fini.

- Le **support** d'une famille $(c_i)_{i\in I}$ est le sous-ensemble $\{i \in I \ / \ c_i \neq 0\}$ noté $\mathrm{Supp}\,(c_i)_{i\in I}$.
- Une famille $(c_i)_{i\in I}$ de support fini est dite **presque nulle**.

L'ensemble des familles presque nulles d'éléments de E, indexées par I, est noté $E^{(I)}$.

- Soit $(c_i)_{i\in I}$ une famille de E et $J \subset I$. On dit que $(c_j)_{j\in J}$ est une **sous-famille** de $(c_i)_{i\in I}$. On dit aussi que $(c_i)_{i\in I}$ est une **sur-famille** de $(c_j)_{j\in J}$.

1.2 – Combinaisons linéaires d'éléments de E

- Soit $(c_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que $x \in E$ est **combinaison linéaire** de $(c_i)_{i\in I}$ lorsqu'il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ de support fini J telle que $x = \sum_{j\in J} \lambda_j c_j$.

Pour $i \in I \setminus J$, on a $\lambda_i = 0$, ce qui autorise à écrire $x = \sum_{i\in I} \lambda_i c_i$.

- Soit A une partie de E. On dit que $x \in E$ est **combinaison linéaire** d'éléments de A lorsqu'il est combinaison linéaire de la famille $(a)_{a\in A}$ des éléments de A.
- L'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A est le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(A)$ engendré par A.

2. Familles génératrices

- Étant donné un sous-espace vectoriel F de E, on dit qu'une famille $(c_i)_{i\in I} \in E^I$ est **génératrice** de F lorsque $\mathrm{Vect}\left((c_i)_{i\in I}\right) = F$.
- Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore une famille génératrice de E.
- Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Si $(c_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E, alors $(u(c_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, u$.

3. Familles libres, liées

Définitions

[22] J est fini.

- Une famille finie non vide $(c_j)_{j\in J} \in E^J$ [22] est **libre** quand

$$\left(\forall (\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J\right), \ \left(\sum_{j\in J} \lambda_j c_j = 0_E \ \Rightarrow \ \forall j \in J, \ \lambda_j = 0\right)$$

- Une famille non vide $(c_i)_{i\in I} \in E^I$ est **libre** si toutes ses sous-familles finies sont libres.

On dit aussi que les éléments d'une famille libre sont **linéairement indépendants**.

- Une famille est dite **liée** quand elle n'est pas libre.

On dit que ses éléments sont **linéairement dépendants**.

Copyrighted material

Propriétés

- Une famille à un élément (x) est libre si et seulement si $x \neq 0_E$. [23]
- Les éléments d'une famille libre sont deux à deux distincts.
- Toute sur-famille d'une famille liée est liée. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Une famille $(c_i)_{i\in I}$ est liée si et seulement si il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires, de support fini non vide, telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i c_i = 0_E$.
- Une famille $(c_i)_{i\in I}$ est liée si et seulement si il existe $k \in I$ tel que c_k soit combinaison linéaire de la famille $(c_i)_{i\in I\setminus\{k\}}$.

[23] Une famille contenant 0_E est liée.

Propriété 4

Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

a) Si $(c_i)_{i\in I}$ est une famille liée de E, alors $(u(c_i))_{i\in I}$ est une famille liée de F.

b) u injective et $(c_i)_{i\in I}$ famille libre de E, implique que $(u(c_i))_{i\in I}$ est une famille libre de F.

Propriété 5

Soit $(c_i)_{i\in I}$ une famille libre de E et $x \in E$ tel que les vecteurs de $\{x\} \cup \{c_i, i \in I\}$ soient liés. Alors x est combinaison linéaire de $(c_i)_{i\in I}$ d'une manière unique.

4. Bases

- Une base de E est une famille $(b_i)_{i\in I}$ d'éléments de E qui est à la fois libre et génératrice de E.
- Une famille $(b_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si c'est une famille libre maximale.
- Une famille $(b_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si c'est une famille génératrice minimale.

5. Coordonnées

Propriété 6

Soit $(b_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout vecteur $x \in E$, il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ et une seule, de support fini, telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i b_i$.

Pour tout $x \in E$, la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ du théorème ci-dessus est appelée la famille des **coordonnées** de x dans la base $(b_i)_{i\in I}$. [24]

Si $x \neq 0_E$, avec $J = \mathrm{Supp}(\lambda_i)_{i\in I}$, on a $x = \sum_{i\in I} \lambda_i b_i = \sum_{i\in J} \lambda_i b_i$.

[24] La famille des coordonnées de 0_E est la famille nulle.

Propriété 7

Détermination d'une application linéaire.

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $(b_i)_{i\in I}$ une base de E et $(c_i)_{i\in I} \in F^I$.

a) Il existe une application linéaire et une seule φ de E dans F telle que : $\forall i \in I, \varphi(b_i) = c_i$.

b) φ est injective si et seulement si $(c_i)_{i\in I}$ est une famille libre.

c) φ est surjective si et seulement si $(c_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de F.

d) φ est un isomorphisme si et seulement si $(c_i)_{i\in I}$ est une base de F.

L'application φ est déterminée de la manière suivante :

pour $x \in E$, de coordonnées $(\lambda_i)_{i\in I}$, $\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i\in I} \lambda_i b_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i c_i$.

Copyrighted material

Exemple 6 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille $F = (f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ des fonctions $f_a : x \mapsto |x-a|$ est libre.

Soit $(a_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une famille finie de réels deux à deux distincts et $(f_{a_i})_{i\in[\![1,p]\!]}$ une sous-famille finie de F. Soit alors une famille $(\lambda_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ de scalaires telle que :

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_{a_i} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{p}\lambda_i |x-a_i| = 0.$$

S'il existait $k\in[\![1,p]\!]$ tel que $\lambda_k \neq 0$, on aurait $f_{a_k} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{p} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} f_{a_i}$.

Or f_{a_k} n'est pas dérivable en a_k alors que les f_{a_i} sont dérivables en a_k pour $i\neq k$.

Par suite, on a $\lambda_i = 0$ pour tout $i\in[\![1,p]\!]$ et toute sous-famille finie de $(f_{a_i})_{i\in[\![1,p]\!]}$ est libre.

6. Dimension finie

Définition 8

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est **de dimension finie** quand il a une famille génératrice finie. (25)

(25) Dans le cas contraire, on dit qu'il est de **dimension infinie**.

Propriété 8

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base finie.

Propriété 9

Si un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E admet une famille génératrice de cardinal n, alors toute famille d'au moins $n+1$ vecteurs est liée. (26)

(26) Toute famille libre est de cardinal au plus n.

Propriété 10

Théorème de la dimension

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul et de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Définition 9

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie, le nombre d'éléments d'une base est appelé la **dimension** de E. (27)

Il est noté $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou $\dim E$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

(27) Par convention, l'espace vectoriel nul a pour dimension 0.

Propriété 11

Théorème d'échange

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension n.

Si L et G sont des parties de E respectivement libre et génératrice, on peut compléter la famille L par des éléments de G pour obtenir une base de E.

Théorème 11

Des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

Remarque

Si E est de dimension finie et si F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel isomorphe à E, alors F est de dimension finie et $\dim F = \dim E$.

Copyrighted material

Propriété 12

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie.

On a $\dim F \leqslant \dim E$ et $\dim F = \dim E$ si et seulement si $F = E$.

Théorème 12

Dimension d'un produit

Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, l'espace produit $\prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est de dimension finie et : $\dim \prod_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.

Quand $n = 2$, $E_1 \neq \{0_{E_1}\}$ et $E_2 \neq \{0_{E_2}\}$, si $(e_{1,i})_{1 \leqslant i \leqslant n_1}$ est une base de E_1 et $(e_{2,j})_{1 \leqslant j \leqslant n_2}$ est une base de E_2, une base de $E_1 \times E_2$ est

$$\left((e_{1,1}, 0_{E_2}), (e_{1,2}, 0_{E_2}), \ldots, (e_{1,n_1}, 0_{E_2}), (0_{E_1}, e_{2,1}), \ldots, (0_{E_1}, e_{2,n_2})\right)$$

Théorème 13

Dimension de $\mathscr{L}(E, F)$

Si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathscr{L}(E, F)$ est de dimension finie :

$$\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim E \cdot \dim F.$$

Soit $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ et $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ des bases de E et F respectivement.

Une base de $\mathscr{L}(E, F)$ est alors $(\varphi_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ où les φ_{ij} sont les éléments de $\mathscr{L}(E, F)$ caractérisés par $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_{ij}(e_k) = \delta_{jk} f_i$

Remarques

1) Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$, en posant $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$, on a $u = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varphi_{ij}$

$A = [a_{ij}]$ est la matrice de u par rapport aux bases $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ et $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$

2) En notant E_{ij} les matrices élémentaires, on a $A = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$

E_{ij} est la matrice de φ_{ij} par rapport aux bases $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ et $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$

D. Somme de sous-espaces vectoriels

1. Somme, somme directe de deux sous-espaces [28]

[28] Ce cas a été traité en première année.

Soit F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1.1 – Somme

- La **somme** de F_1 et F_2 est l'ensemble $F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in F_1 \ , \ x_2 \in F_2\}$. [29]
- Si F_1 et F_2 sont de dimensions finies : $\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)$.

[29] $F_1 + F_2$ est le sous-espace vectoriel engendré par $F_1 \cup F_2$.

1.2 – Somme directe

- La **somme** $F_1 + F_2$ est **directe** lorsque $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$; on la note alors $F_1 \oplus F_2$.
- La somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si pour chaque $x \in F_1 + F_2$, il existe un unique $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.
- La somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si l'application φ de $F_1 \times F_2$ dans E, $\varphi : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, est injective.
- La somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si pour tout $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$, $x_1 + x_2 = 0_E \iff x_1 = x_2 = 0_E$.

Copyrighted material

1.3 – Sous-espaces supplémentaires

Soit F_1, F_2 des sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\varphi \in \mathscr{L}(F_1 \times F_2, E)$, $\varphi : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$.

- F_1 et F_2 sont **supplémentaires dans** E lorsque $F_1 \oplus F_2 = E$, c'est-à-dire si et seulement si :
$$F_1 + F_2 = E \text{ et } F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$$
- Les sous-espaces F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E lorsque l'application φ est bijective, donc lorsque pour tout $x \in E$, il existe un unique $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.
- On suppose $E = F_1 \oplus F_2$. L'application $\psi : E \to F_1 \times F_2$, $x \mapsto x_1 + x_2$, où (x_1, x_2) est l'unique couple de $F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$, est linéaire. [30]

[30] ψ est en fait φ^{-1}.

Théorème 14

Caractérisation d'une application linéaire [31]

Si E et F sont des des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est caractérisée par ses restrictions à des sous-espaces A et B supplémentaires dans E.

[31] Ce théorème et le suivant ont été vus en MPSI et PCSI.

Théorème 15

Théorème noyau-image

Soit E et E' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour tout $f \in \mathscr{L}(E, E')$, $\operatorname{Im} f$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$. [32]

[32] Si G est un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$, l'application $\overline{f}$ de G dans $\operatorname{Im} f$ induite par f est un isomorphisme.

Propriété 13

Des sous-espaces G et G' supplémentaires dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E d'un même sous-espace vectoriel F sont isomorphes.

☞ Soit p la projection sur G parallèlement à F. On a $\operatorname{Ker} p = F$ et $\operatorname{Im} p = G$. [33]
Le théorème noyau-image assure alors que G' est isomorphe à G.

[33] Les projecteurs sont brièvement repris au paragraphe suivant.

2. Codimension

Définition 10

Étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on dit qu'un sous-espace vectoriel est de **codimension finie** quand il admet un supplémentaire de dimension finie. [34]

[34] E n'est pas supposé de dimension finie.

Propriété 14

Si F est un sous-espace de codimension finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors tous les supplémentaires de F dans E ont la même dimension.

☞ Soit G un supplémentaire de dimension finie de F dans E. [35]
Si G' est aussi un supplémentaire de F dans E, alors G et G' sont isomorphes.
Il s'ensuit que G' est de dimension finie et $\dim G' = \dim G$.

[35] Il en existe un, par définition de la codimension finie pour F.

Définition 11

Si F est un sous-espace de codimension finie de E, la **codimension** de F est la dimension d'un supplémentaire G de F. On note $\operatorname{codim}_E F = \dim G$.

Corollaire

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel F est de codimension finie et $\operatorname{codim}_E F = \dim E - \dim F$.

Hyperplans

Les hyperplans sont les sous-espaces qui admettent un supplémentaire de dimension 1.
Ce sont donc les sous-espaces de codimension égale à 1.

Copyrighted material

Exemple 7 Sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Soit $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, n un entier naturel et $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Soit P un polynôme fixé de degré égal à $n+1$; alors l'ensemble $P\,\mathbb{K}[X]$ des multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, de codimension finie égale à n.

- $P\,\mathbb{K}[X]$ contient le polynôme nul, il est donc non vide.

Pour tous PQ_1, PQ_2 éléments de $P\,\mathbb{K}[X]$ et tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, on a :

$$\lambda_1 PQ_1 + \lambda_2 PQ_2 = P(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) \quad \text{avec} \quad \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 \in \mathbb{K}[X],$$

donc $\lambda_1 PQ_1 + \lambda_2 PQ_2 \in P\,\mathbb{K}[X]$.

- Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, la division euclidienne de A par P donne l'existence de deux polynômes Q et R tels que : **(1)** $A = R + PQ$ et **(2)** $\deg R < \deg P$ ou $R = 0$.

La condition **(2)** se lit aussi $R \in \mathbb{K}_n[X]$ et alors **(1)** donne $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_n[X] + P\,\mathbb{K}[X]$.

D'autre part, pour tout U non nul de $P\,\mathbb{K}[X]$, on a :

$$\deg U \geqslant \deg P \quad \text{c'est-à-dire} \quad \deg U \geqslant n+1$$

et pour tout U non nul de $\mathbb{K}_n[X]$, $\deg U \leqslant n$. Il en résulte que $\mathbb{K}_n[X] \cap P\,\mathbb{K}[X] = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$.

Finalement $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_n[X] \oplus P\,\mathbb{K}[X]$.

3. Projecteurs et involutions linéaires

3.1 – Projecteurs

- Un **projecteur** de E est un endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$. [36]
- Pour tout projecteur p de E, on a $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.
- Si p est un projecteur de E, $\operatorname{Im} p$ est l'ensemble des invariants de p : $\operatorname{Im} p = \{x \in E \,/\, p(x) = x\}$.
- Soit $p \in \mathscr{L}(E)$, alors p est un projecteur si et seulement si $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur.
- Si p est un projecteur de E, $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - p)$, $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im}(\mathrm{Id}_E - p)$.
- Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, pour tout x de E, il existe un unique $(x_1, x_2) \in A \times B$ tel que $x = x_1 + x_2$.

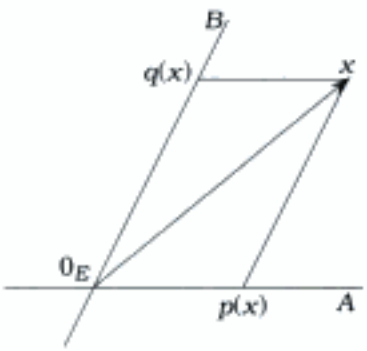
Les applications :

$$p : E \to E \quad , \quad x \mapsto x_1$$
$$\text{et} \quad q : E \to E \quad , \quad x \mapsto x_2$$

sont des projecteurs tels que :

$$\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} q = A$$
$$\operatorname{Im} q = \operatorname{Ker} p = B$$
$$p + q = \mathrm{Id}_E \quad , \quad p \circ q = q \circ p = 0$$

p (resp. q) est appelé **projection sur** A (resp. B) **parallèlement à** B (resp. A).



- Si p est un projecteur de E alors c'est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

[36] On dit aussi endomorphisme idempotent.

3.2 – Involutions linéaires (ou symétries)

- Une **symétrie** de E est un endomorphisme $s \in \mathscr{L}(E)$ involutif, c'est-à-dire tel que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. C'est donc un automorphisme tel que $s^{-1} = s$.

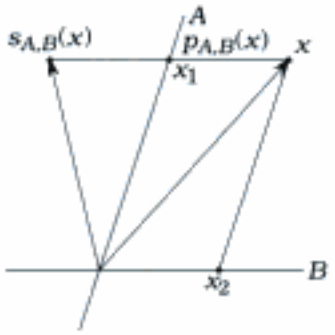
- $s \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$ est un projecteur.

La symétrie s et le projecteur p sont dits **associés** et on a :

$$p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E) \qquad s = 2p - \mathrm{Id}_E$$
$$\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \qquad \operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$$
$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E).$$

Copyrighted material

▪ Si A et B sont deux sous-espaces supplémentaires dans E, pour tout x de E, il existe un unique $(x_1, x_2) \in A \times B$ tel que $x = x_1 + x_2$.



L'application $s_{A,B} : E \to E,\ x \mapsto x_1 - x_2$ est la symétrie associée au projecteur $p_{A,B} : x \mapsto x_1$.

$s_{A,B}$ est appelée **symétrie par rapport à A, parallèlement à B.**

▪ Pour toute symétrie s de E, en posant :

$A = \{x \in E / s(x) = x\}$ (invariants de s)

$B = \{x \in E / s(x) = -x\}$ (éléments transformés en leurs opposés)

on a $E = A \oplus B$ et s est la symétrie par rapport à A parallèlement à B.

4. Somme de n sous-espaces vectoriels

$F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

4.1 – Somme

Définition 12

On appelle somme des F_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, et on note $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ ou $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$ l'ensemble des vecteurs $\sum_{i=1}^{n} x_i$ où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, x_i décrit F_i.

Propriété 15

$\varphi : F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n \to E,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ est linéaire.
Son image est $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ qui est donc un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 16

$F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$.

☞ ▪ Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $x_i \in F_i$ en écrivant $x_i = 0 + \cdots + 0 + x_i + 0 + \cdots + 0$ avec $(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$, on prouve que $x_i \in F_1 + F_2 + \cdots + F_n$.
Ainsi $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} F_j \supset F_i$ donc $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i \supset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$ et, puisque $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E, on a $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i \supset \text{Vect}\left(\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i\right)$.

▪ Pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont dans $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$, donc appartiennent à $\text{Vect}\left(\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i\right)$ et puisqu'il s'agit là d'un sous-espace vectoriel de E, on a $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \in \text{Vect}\left(\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i\right)$. Ainsi $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i \subset \text{Vect}\left(\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i\right)$.

4.2 – Somme directe

Définition 13

La somme $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$ est **directe** lorsque : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ F_j \cap \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} F_i = \{0_E\}$.

On note alors : $\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$ ou $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Copyrighted material

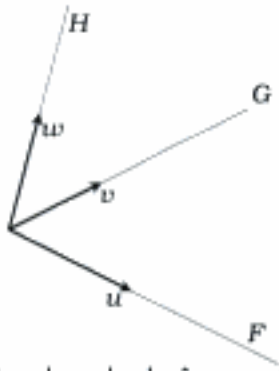
Exemples

- Dans $\mathbb{R}^3$, soit trois vecteurs u, v, w formant un système libre.

$$F = \mathbb{R}u \ , \ G = \mathbb{R}v \ , \ H = \mathbb{R}w$$

La somme $F + G + H$ est directe et égale à $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G \oplus H$$



- Dans $E = \mathbb{R}_4[X]$ espace vectoriel des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg P \leqslant 4$, soit :

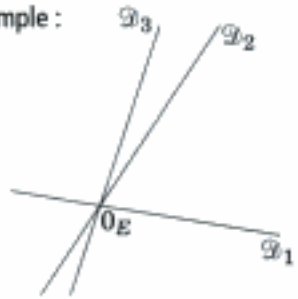
$$F = \text{Vect}\left(X^2, X^4\right) \ , \ G = \text{Vect}(X) \ , \ H = \text{Vect}\left(X^3\right)$$

La somme $F + G + H$ est directe mais n'est pas égale à $\mathbb{R}_4[X]$ car le seul polynôme constant appartenant à $F \oplus G \oplus H$ est le polynôme nul.

Remarque

Si la somme $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$ est directe, alors pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $F_i \cap F_j = \{0_E\}$. Mais il faut prendre garde au fait que ces conditions ne permettent pas de conclure que la somme $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$ est directe. Considérer par exemple :

dans le plan $\mathbb{R}^2$ trois droites vectorielles $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ telles que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{0_E\}$, $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 = \{0_E\}$, $\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{D}_1 = \{0_E\}$. On a alors $\mathbb{R}^2 = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ donc : $\mathcal{D}_3 \cap (\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2) = \mathcal{D}_3 \neq \{0_E\}$.



Propriété 17

La somme $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$ est directe si et seulement si pour tout $x \in \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$, il existe un unique $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ tel que $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

☞

- Supposons que la somme $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$ soit directe. Soit alors :

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ et $\left(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n\right) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n$ Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a alors :

$$x_i - x'_i = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} x'_j - x_j \quad \text{donc} \quad x_i - x'_i \in F_i \cap \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} F_j \quad \text{puis} \quad x_i = x'_i$$

- Supposons que pour tout $x \in \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$ il existe $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ unique tel que $u = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Pour x élément de $F_i \cap \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} F_j$, il existe :

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} F_j, \ x = x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n.$$

Donc : $x_1 + \cdots + x_{i-1} + 0_E + x_{i+1} + \cdots + x_n = 0_E + \cdots + 0_E + x + 0_E + \cdots + 0_E$

avec $\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0_E, x_{i+1}, \ldots, x_n\right)$ et $(0_E, \ldots, 0_E, x, 0_E, \ldots, 0_E)$

dans $F_1 \times \cdots \times F_i \times \cdots \times F_n$.

D'après l'hypothèse, ces n-uplets sont égaux donc $x = 0_E$ et on a $F_i \cap \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} F_j = \{0_E\}$.

Propriété 18

La somme $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$ est directe si et seulement si l'application :

$\varphi : F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n \to E, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ est injective. ✎ (37)

✎ (37) C'est une autre formulation de la propriété précédente.

Copyrighted material

Propriété 19

La somme $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} F_i$ est directe si et seulement si : $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n)\in F_1\times F_2\times\ldots\times F_n$,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0_E \iff x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0_E$$

☞ L'application linéaire φ est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0_E\}$.

Propriété 20

La somme $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} F_i$ est directe si et seulement si les sommes :

$$G = \sum_{1\leqslant i\leqslant n-1} F_i \quad \text{et} \quad G + F_n \quad \text{sont directes.}$$

☞ Supposons que les sommes $\sum_{1\leqslant i\leqslant n-1} F_i$ et $G + F_n$ soient directes.

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E$. La somme $G + F_n$ étant directe, il vient $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i = 0_E$.

Alors la somme $\sum_{1\leqslant i\leqslant n-1} F_i$ étant directe, $\sum_{i=1}^{n-1} x_i = 0_E$ donne : $x_i = 0_E$ pour $1\leqslant i\leqslant n-1$.

Ainsi $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} F_i$ est directe. La réciproque est évidente.

Exemple 8 Réunion de familles libres

Soit $F_1, \ldots, F_n$ n sous-espaces vectoriels de E tels que la somme $F = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} F_i$ soit directe, et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs « réunion » de n sous-familles $(x_i)_{i\in I_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, telles que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall i \in I_k,\ x_i \in F_k$$

$I_1, \ldots, I_n$ réalise une partition de I : $I = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} I_k$ et $\forall k \neq \ell,\ I_k \cap I_\ell = \varnothing$

Alors $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si les n sous-familles $(x_i)_{i\in I_k}$ sont libres.

- Si $(x_i)_{i\in I}$ est libre, toute sous-famille est libre, c'est donc le cas pour les $(x_i)_{i\in I_k}$.
- Si les $(x_i)_{i\in I_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont libres, soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires de support fini telles que $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E$.

Posons $y_k = \sum_{i\in I_k} \lambda_i x_i$, on a alors $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = \sum_{k=1}^{n} y_k$ et $y_k \in F_k$. La somme $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} F_k$ étant directe, l'égalité $\sum_{k=1}^{n} y_k = 0_E$ donne $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0_E$. Chaque famille $(x_i)_{i\in I_k}$ étant libre, $\sum_{i\in I_k} \lambda_i x_i = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, donne enfin : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall i \in I_k,\ \lambda_i = 0$ donc $\forall i \in I,\ \lambda_i = 0$. On a ainsi prouvé que $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

4.3 – Sous-espaces supplémentaires

Définition 14

Les sous-espaces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont dits **supplémentaires** dans E lorsque leur somme est directe, égale à E : $E = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} F_i$.

Propriété 21

$F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont supplémentaires dans E si et seulement si :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} F_i = E \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ F_i \cap \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} F_j = \{0_E\}$$

Copyrighted material

Propriété 22

$F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont supplémentaires dans E si et seulement si l'application :

$$\varphi : F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n \to E, \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

est bijective, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe un unique :

$$(x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n \quad \text{tel que} \quad x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

4.4 – Sous-espaces supplémentaires et projecteurs

Propriété 23

Soit $F_1, \ldots, F_n$, des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit p_i le projecteur d'image F_i et de noyau $\sum_{1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq i} F_j$. La **famille de projecteurs** $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est dite **associée** à la somme directe $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$; elle vérifie les propriétés :

$$\textbf{(1)} \ \sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Id}_E \qquad \textbf{(2)} \ \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \ \Rightarrow \ p_i \circ p_j = 0.$$

☞ En posant $G_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq i} F_j$, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E = F_i \oplus G_i$.

Tout x de E s'écrit de manière unique $x = \sum_{j=1}^{n} x_j$, $x_j \in F_j$ donc aussi :

$$x = x_i + x_i' \ \text{ avec } \ x_i \in F_i \ \text{ et } \ x_i' = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq i} x_j \ , \ x_i' \in G_i.$$

p_i est donc le projecteur qui à tout x de E associe x_i composante de x sur F_i.

L'égalité $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)$ d'où $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Id}_E$. **(1)**

Si $i \neq j$, on a $F_j \subset \sum_{1 \leqslant k \leqslant n,\ k \neq i} F_k$ donc $\mathrm{Im}\, p_j \subset \mathrm{Ker}\, p_i$ et $p_i \circ p_j = 0$. **(2)**

Propriété 24

Soit $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie d'endomorphismes de E vérifiant les propriétés **(1)** et **(2)** :

$$\textbf{(1)} \ \sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Id}_E \qquad \textbf{(2)} \ \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \ \Rightarrow \ p_i \circ p_j = 0.$$

Alors les sous-espaces $F_i = \mathrm{Im}\, p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont supplémentaires dans E et $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est la famille de projecteurs associée à la somme directe $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$.

☞ **(1)** donne $\sum_{i=1}^{n} p_j \circ p_i = p_j$ et, avec **(2)**, il reste $p_j^2 = p_j$: les p_j sont donc des projecteurs.

Avec **(1)**, il vient $\forall x \in E, \ x = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)$. Or $p_i(x) \in F_i$, et il s'ensuit $E = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$.

Soit maintenant $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$, $\ldots$, $x_n \in F_n$ tels que $\sum_{j=1}^{n} x_j = 0_E$.

p_j étant un projecteur, on a $F_j = \mathrm{Im}\, p_j = \mathrm{Inv}(p_j)$, d'où $p_j\left(x_j\right) = x_j$ donc $\sum_{j=1}^{n} p_j\left(x_j\right) = 0_E$.

En composant par p_i, il vient $\sum_{j=1}^{n} p_i \circ p_j\left(x_j\right) = 0_E$, donc d'après la propriété **(2)** il reste

$p_i^2\left(x_i\right) = 0_E$ c'est-à-dire $x_i = 0$ car $p_i^2 = p_i$ et $x_i \in \mathrm{Im}\, p_i$.

On a ainsi prouvé que la somme $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$ est directe : $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$.

Copyrighted material

Ainsi tout x de E se décompose de manière unique sous la forme : $x = \sum_{j=1}^{n} x_j \quad , \quad x_j \in F_j$.

Alors : $p_i(x) = p_i^2(x_i) = x_i$ et p_i est le projecteur d'image F_i, de noyau $G_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq i} F_j$.

Exemple 9 Combinaison linéaire de projecteurs

Soit $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de projecteurs de E associée à une somme directe $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$ et $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$. On pose $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$, et on se propose de calculer f^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

p_1 et p_2 étant permutables, ✎ (38) on a : $(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)^k = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{C}_k^j \lambda_1^j \lambda_2^{k-j} p_1^j \circ p_2^{k-j}$.

✎ (38) Formule du binôme. $p_i^0 = \mathrm{Id}_E$.

Sachant que $p_1 \circ p_2 = 0$, il reste $(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)^k = \lambda_1^k p_1 + \lambda_2^k p_2$.

On termine par récurrence sur n pour arriver à $f^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k p_i$.

Théorème 16

Caractérisation d'une application linéaire ✎ (39)

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Une application linéaire de E dans F est caractérisée par ses restrictions à n sous-espaces $A_1, \ldots, A_n$ supplémentaires dans E.

✎ (39) Extension du théorème 4.

☞ $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i$. Montrons que, étant donné $u_i \in \mathscr{L}(A_i, F)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe une et une seule application linéaire f de E dans F telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f_{|A_i} = u_i$.

Unicité

Supposons que f existe, alors sachant que tout x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \in A_i$, on obtient $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i)$.

Cette expression de $f(x)$ prouve l'unicité, sous réserve d'existence.

Existence

On vérifie que l'application $f : E \to F$ définie par $f : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i)$ où les x_i sont tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in A_i$, est linéaire et telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad f_{|A_i} = u_i$$

En introduisant les projecteurs p_i associés à la somme directe $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i$ on a $f = \sum_{i=1}^{n} u_i \circ p_i$ ce qui prouve que $f \in \mathscr{L}(E)$ et $f_{|A_i} = u_i$.

4.5 – Sommes directes en dimension finie

Théorème 17

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si la somme $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$ de n sous-espaces vectoriels de E est directe, on a :

$$\dim \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$$

et $F_1, \ldots, F_n$ sont supplémentaires dans E si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} \dim F_i = \dim E$.

Copyrighted material

Définition 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $F_1, \dots, F_n$ n sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E : $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!],\ F_i \neq \{0_E\}$

Si $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_{p_1})$ est une base de F_1,
$\mathcal{B}_2 = (e_{p_1+1}, \dots, e_{p_1+p_2})$ est une base de F_2,
$\dots \quad \dots \quad \dots$
$\mathcal{B}_n = (e_{p_1+\dots+p_{n-1}+1}, \dots, e_{p_1+p_2+\dots+p_n})$ est une base de F_n,

alors $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ avec $N = \sum_{i=1}^{n} p_i$ est une base de E

dite **adaptée à la décomposition** $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i$.

5. Polynômes d'interpolation de Lagrange

Théorème 18

Soit $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ scalaires fixés deux à deux distincts.
Pour tout $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n et tel que $P(a_0) = \lambda_0,\ P(a_1) = \lambda_1, \dots, P(a_n) = \lambda_n$.

☞ Considérons $u : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$, $u : P \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$.
$P(a_0) = \lambda_0,\ P(a_1) = \lambda_1, \dots, P(a_n) = \lambda_n$ se lit : $u(P) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

- Il est clair que u est linéaire.

$\operatorname{Ker} u$ est constitué des polynômes P admettant $a_0, a_1, \dots, a_n$ pour racines, donc en posant $N = \prod_{i=0}^{n} (X - a_i)$, $\operatorname{Ker} u$ est l'ensemble des multiples de N : $\operatorname{Ker} u = N\,\mathbb{K}[X]$.

- Avec $\deg N = n+1$, un supplémentaire de $N\,\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$ est $\mathbb{K}_n[X]$. (40)
- La restriction $u_{|\mathbb{K}_n[X]}$ induit un isomorphisme v de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\operatorname{Im} u$. (41)

Il en résulte $\dim \operatorname{Im} u = \dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$ et donc $\operatorname{Im} u = \mathbb{K}^{n+1}$, v est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.

En conséquence, pour tout $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique P dans $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $u(P) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, il s'agit de $P = v^{-1}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Expression de $P = v^{-1}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Soit $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$, et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $L_k = v^{-1}(e_k)$.
Alors $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. (42)

Avec $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k$, il vient $P = v^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k$

L_k est l'unique polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $u(L_k) = e_k$ c'est-à-dire :

$$L_k(a_i) = 0 \text{ si } i \neq k \quad \text{et} \quad L_k(a_k) = 1$$

$L_k(a_i) = 0$ pour $i \neq k$, avec $\deg L_k \leqslant n$ donne qu'il existe un scalaire μ_k tel que :

$$L_k = \mu_k \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} (X - a_i)$$

alors $L_k(a_k) = 1$ donne $\mu_k = \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \frac{1}{a_k - a_i}$, d'où $L_k = \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \left(\frac{X - a_i}{a_k - a_i}\right)$.

En conséquence, l'unique polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(a_k) = \lambda_k$ est :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \left(\frac{X - a_i}{a_k - a_i}\right)$$

(40) Voir l'exemple (7).

(41) Théorème noyau – image.

(42) v^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{K}^{n+1}$ sur $\mathbb{K}_n[X]$.

Copyrighted material

Définition 16

Les $L_k = \prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} \left(\frac{X-a_i}{a_k-a_i}\right)$, $0\leqslant k\leqslant n$, sont les **polynômes d'interpolation de Lagrange** associés à la famille de scalaires deux à deux distincts $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

Exemple 10 Écrire l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3, tel que :

$$P(0) = -1\ ,\ P(2) = 1\ ,\ P(-2) = 1\ ,\ P(-1) = 2.$$

Écrivons les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $(0, 2, -2, -1)$:

$$L_0 = \frac{(X-2)(X+2)(X+1)}{(-2)\times 2\times 1} = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x + 1$$

$$L_1 = \frac{X(X+2)(X+1)}{2\times 4\times 3} = \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{12}x$$

$$L_2 = \frac{X(X-2)(X+1)}{(-2)\times(-4)\times(-1)} = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$L_3 = \frac{X(X-2)(X+2)}{(-1)\times(-3)\times 1} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x$$

On en déduit : $P = -L_0 + L_1 + L_2 + 2L_3$, c'est-à-dire $P = \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{10}{3}x - 1$.

E. Rang d'une application linéaire

1. Théorème du rang

Théorème 19

Théorème du rang

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f\in\mathscr{L}(E,F)$.

Si E est de dimension finie, alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie, et on a :

$$\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim E.$$

☞ E étant de dimension finie, $\operatorname{Ker} f$ admet au moins un supplémentaire H dans E.
H est de dimension finie et isomorphe à $\operatorname{Im} f$ (théorème noyau-image).
$\operatorname{Im} f$ est donc de dimension finie et $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim H$.
Avec $\operatorname{Ker} f \oplus H = E$, il vient $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim H = \dim E$, d'où :

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim E.$$

Définition 17

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f\in\mathscr{L}(E,F)$.

Si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie, $\dim(\operatorname{Im} f)$ est appelée le **rang de** f, on le note $\operatorname{rg} f$.

Remarque

Si E est de dimension finie, alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et on a :

$$\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim E - \dim(\operatorname{Ker} f).$$

Théorème 20

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f\in\mathscr{L}(E,F)$, avec E de dimension finie.

Si $\mathscr{B} = (e_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est une base de E, alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}\left(f(e_j)\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$.

On a $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(f(e_j)\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et ✎ [43] : $\operatorname{rg}\left(f(e_j)\right)_{1\leqslant j\leqslant n} = \dim \operatorname{Vect}\left(f(e_j)\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$.

✎ [43] Voir Algèbre – Géométrie MPSI ou PCSI.

Remarque

Si F est également de dimension finie, $\dim F = p$, et rapporté à une base $\mathscr{B}' = (e'_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$,

on pose pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}e'_i$.

Copyrighted material

Alors $A = [a_{ij}]$ est la matrice de f sur le couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, le rang de la famille $(f(e_j))_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est aussi le rang de la matrice A, le calcul pratique de ce rang peut se faire par la **méthode du pivot de Gauss**. Ces définitions et la technique du pivot ont été présentées en première année (Voir Algèbre – Géométrie MPSI ou PCSI).

Théorème 21

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie n, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) f est injective (2) f est surjective (3) f est bijective (4) $\operatorname{rg} f = n$

☞ Il suffit de prouver **(1) $\Longleftrightarrow$ (2)**.

- Si f est injective, on a $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et d'après le théorème du rang :
$$\dim \operatorname{Im} f = \dim E \quad \text{donc} \quad \dim \operatorname{Im} f = \dim F \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f = F$$
Ainsi f est surjective.
- Si f est surjective, $\dim \operatorname{Im} f = \dim F = \dim E$ et le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Ker} f = 0$. Ainsi f est injective.

Théorème 22

Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies,
$$f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } g \in \mathcal{L}(F, G).$$

a) Si f est bijective, alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$.

b) Si g est bijective, alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.

☞ a) $f \in \operatorname{Isom}(E, F)$ donc $\dim E = \dim F$. On a alors $\operatorname{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\operatorname{Ker} g)$ donc $\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) = \dim \operatorname{Ker} g$. On en déduit :
$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(g \circ f) &= \dim E - \dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \\ &= \dim F - \dim \operatorname{Ker} g \\ &= \operatorname{rg} g \end{aligned}$$

b) $g \in \operatorname{Isom}(F, G)$

Alors $\operatorname{Im} g \circ f = g(\operatorname{Im} f)$ donne $\dim \operatorname{Im} g \circ f = \dim \operatorname{Im} f$ c'est-à-dire $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$.

Théorème 23

Matrice canonique d'une application linéaire

Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, $\dim E = p$, $\dim F = n$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang $r \geqslant 1$.

Alors il existe $\mathcal{B}_E$ base de E et $\mathcal{B}_F$ base de F telles que la matrice de f sur le couple de bases $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ soit, en l'écrivant par blocs :
$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

☞ Rappelons que, avec $\mathcal{B}_E = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$, $\mathcal{B}_F = (e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i$, la matrice de f sur le couple de bases $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ est la matrice A de terme général a_{ij} :
$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F} f = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$
Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E : $E = G \oplus \operatorname{Ker} f$, on a ici
$$\dim \operatorname{Ker} f = p - r \quad , \quad \dim G = r$$
Construisons $\mathcal{B}_E = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ base de E adaptée à cette somme directe : $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant r}$ est une base de G et $(e_j)_{r+1 \leqslant j \leqslant p}$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

D'après le théorème noyau-image, $(f(e_j))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ est une base de $\operatorname{Im} f$. On pose $e'_j = f(e_j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$ et on complète par $e'_{j+1}, \ldots, e'_n$ pour obtenir une base $\mathcal{B}_F$ de F.

Par construction, on a : $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F} f = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Copyrighted material

2. Endomorphismes nilpotents

Définition 18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul.

$u \in \mathscr{L}(E)$ est **nilpotent** si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$. (44)

On pose alors $i = \min\{p \in \mathbb{N} \,/\, u^p = 0\}$. Cet entier i est appelé **indice** de u.

Il est caractérisé par $u^{i-1} \neq 0$, $u^i = 0$. (45)

(44) Par convention, $u^0 = \mathrm{Id}_E$ pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$.

(45) Par exemple, l'endomorphisme nul est nilpotent d'indice 1.

Propriété 25

Si E de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent, alors $\operatorname{rg} u \leqslant n-1$.

☞ Si u, nilpotent d'indice i, était inversible, alors $u^i = 0$ donnerait $u^{i-1} = u^{-1} \circ u^i = 0$, contrairement à la définition de i.
Alors u non inversible donne $\operatorname{rg} u < n$ c'est-à-dire $\operatorname{rg} u \leqslant n-1$. (46)

(46) Autre solution : $u^i=0$ donne $(\det u)^i=0$ donc $\det u=0$ et u n'est pas de rang n.

Propriété 26

Si E est de dimension finie n, soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice i.
Si $x \in E$ vérifie $u^{i-1}(x) \neq 0$, alors la famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{i-1}(x)\right)$ est libre.

☞ Il existe $x \in E$ tel que $u^{i-1}(x) \neq 0$ car par hypothèse, on a $u^{i-1} \neq 0$.

Soit des scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{i-1} \lambda_k u^k(x) = 0$ **(1)**

On compose **(1)** par u^{i-1} : $\lambda_0 u^{i-1}(x) = 0$ donc $\lambda_0 = 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k u^k(x) = 0$ **(2)**

On compose **(2)** par u^{i-2} : $\lambda_1 u^{i-1}(x) = 0$ donc $\lambda_1 = 0$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{i-1} \lambda_k u^k(x) = 0$ **(3)**

Une récurrence immédiate donne ainsi $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{i-1} = 0$ et on a montré que $\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant i-1}$ est libre.

Corollaire 1

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent d'indice i, alors $i \leqslant n$. (47)

(47) Tout système libre de E a au plus n éléments.

Corollaire 2

Si E est de dimension finie n, alors $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent si et seulement si $u^n = 0$.

Corollaire 3

Si u est nilpotent d'indice n, dans un espace de dimension n, il existe des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E telles que $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} u = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}'} u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

En effet, si u est nilpotent d'indice n, il existe e_1 tel que $u^{n-1}(e_1) \neq 0$.
Alors, d'après la propriété 26, avec $e_k = u^{k-1}(e_1)$, le système $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$. $u(e_k) = e_{k+1}$ et $u(e_n) = 0$ donc

$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} u = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ De même (48) $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}'} u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

(48) Il suffit d'inverser l'ordre des vecteurs de base $e'_k = e_{n+1-k}$.

Copyrighted material

F. Dual d'un espace vectoriel Formes linéaires – Hyperplans

1. Formes linéaires – Hyperplans

Définition 19

On appelle **forme linéaire** sur E ✎ (49) toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est appelé l'espace vectoriel **dual** de E. Il est usuellement noté E^*. ✎ (50)

✎ (49) E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

✎ (50) Il faut distinguer E^* de $E \setminus \{0_E\}$.

Définition 20

Un **hyperplan** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel qui admet une droite vectorielle pour supplémentaire. ✎ (51)

✎ (51) C'est un sous-espace de codimension 1.

Propriété 27

Toute forme linéaire non nulle est surjective.

☞ Soit $f \in E^*$, on a $\operatorname{Im} f = \{0_\mathbb{K}\}$ ou $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}$, donc si $f \neq 0$, il reste $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}$.

Propriété 28

Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si, pour tout $a \in E \setminus H$, on a $E = H \oplus \mathbb{K}a$.

☞ Montrons que la condition est nécessaire. ✎ (52)
Soit H un hyperplan de E. Il existe $b \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}b$.
Étant donné $a \in E \setminus H$, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ et $c \in H$ tels que $a = c + \alpha b$.
α est non nul, sinon a serait dans H.
Pour tout $x \in E$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $y \in H$ tels que $x = y + \lambda b$.
Avec $b = \dfrac{1}{\alpha}(a - c)$, on a $x = \left(y - \dfrac{\lambda}{\alpha}c\right) + \dfrac{\lambda}{\alpha}a$, ce qui montre que $E = H + \mathbb{K}a$.
Il reste à remarquer que $a \notin H$ donne $H \cap \mathbb{K}a = \{0_E\}$ ✎ (53) pour avoir $E = H \oplus \mathbb{K}a$.

✎ (52) La condition est suffisante, par définition d'un hyperplan.

✎ (53) De façon générale, si $\mathcal{D}$ est une droite vectorielle et F est un sous-espace vectoriel de E, les seules situations possibles sont
$\mathcal{D} \cap F = \{0_E\}$
et $\mathcal{D} \cap F = \mathcal{D}$.

Propriété 29

Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle u telle que $\operatorname{Ker} u = H$.

☞ a) Soit H un hyperplan de E. Étant donné $a \in E \setminus H$, on a $H \oplus \mathbb{K}a = E$.
Pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ et $h_x \in H$ uniques tels que $x = \lambda_x a + h_x$.
On vérifie aisément que l'application $u : E \to \mathbb{K},\ x \mapsto \lambda_x$ est une forme linéaire non nulle telle que $H = \operatorname{Ker} u$.

b) Soit u une forme linéaire non nulle. Posons $H = \operatorname{Ker} u$.
u étant non nulle, il existe $a' \in E$ tel que $u(a') \neq 0$. Avec $a = \dfrac{1}{u(a')}a'$, on a $u(a) = 1$.
Pour tout $x \in E$, on a $u\left(x - u(x)a\right) = 0$ et donc $x - u(x)a \in H$.
De $x = \left(x - u(x)a\right) + u(x)a$, on déduit que $x \in H + \mathbb{K}a$. Donc $E = H + \mathbb{K}a$.
Comme a n'appartient pas à H, il vient $H \cap \mathbb{K}a = \{0_E\}$ et, finalement, $E = H \oplus \mathbb{K}a$, ce qui montre que H est un hyperplan.

Copyrighted material

Propriété 30

Deux formes linéaires sur E non nulles sont liées si et seulement si elles ont le même noyau.

☞ Soit u et v des formes linéaires non nulles sur E.

a) Si u et v sont liées, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $v = \lambda u$. Il s'ensuit $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v$.

b) On suppose que u et v ont le même noyau H. Pour $a \in E \setminus H$, on a $E = H \oplus \mathbb{K}a$.
Pour tout $x \in E$, il existe $h_x \in H$ et $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tels que $x = h_x + \lambda_x a$.

Avec $u(x) = \lambda_x u(a)$, $v(x) = \lambda_x v(a)$ et $u(a) \neq 0$, il vient $v(x) = \dfrac{v(a)}{u(a)} u(x)$.

Par suite, on a $v = \dfrac{v(a)}{u(a)} u$.

Corollaire

Si u est une forme linéaire non nulle sur E, pour toute forme linéaire v sur E, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda u$ si et seulement si $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v$. ✎ (54)

✎ (54) Le cas où $v=0$ correspond à $\lambda=0$ et $\operatorname{Ker} v=E$.

2. Dimension finie

E est maintenant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n \geqslant 1$, de base $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.

2.1 – Bases duales

Définition 21

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E. Les **formes coordonnées** associées à $\mathcal{B}$ sont les n formes linéaires notées e_j^*, $j \in [\![1, n]\!]$ définies par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$$

Étant donné $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a $e_j^*(x) = x_j$. ✎ (55)

✎ (55) e_j^* est donc l'application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ qui à tout $x \in E$ associe sa $j^{\text{ème}}$ coordonnée sur la base $\mathcal{B}$, ce qui explique l'appellation de «formes coordonnées».

Théorème 24

$\dim E^* = \dim E$.

On sait que $\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E \cdot \dim \mathbb{K}$.

Théorème 25

La famille $\mathcal{B}^* = (e_j^*)_{j \in [\![1,n]\!]}$ des formes coordonnées associées à $\mathcal{B}$ est une base de E^*.
On dit que $\mathcal{B}^*$ est la **base duale** de la base $\mathcal{B}$.

☞ Il suffit de montrer que la famille $\left(e_j^*\right)_{j \in [\![1,n]\!]}$ est libre. ✎ (56) Soit $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^* = 0$. Alors, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^*(e_i) = 0$, d'où $\lambda_i = 0$.

✎ (56) $\dim E^* = n$.

Théorème 26

Soit $f \in E^*$. La famille de ses coordonnées dans $\mathcal{B}^*$ est $\left(f(e_i)\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$: $f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^*$.

☞ f s'écrit de manière unique sous la forme $f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^*$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^*(e_i)$ donne $\lambda_i = f(e_i)$.

Copyrighted material

Théorème 27

a) Pour tout vecteur x non nul de E, il existe φ forme linéaire sur E telle que $\varphi(x) = 1$.

b) Le vecteur nul est l'unique vecteur x de E tel que $\varphi(x) = 0$ pour toute forme linéaire φ.

☞ a) Posons $e_1 = x$, il existe $e_2, \ldots, e_n$ tels que $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ soit une base $\mathcal{B}$ de E.
La première forme coordonnée sur cette base est solution du problème. ✎ (57)

b) Si x est non nul, il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(x) \neq 0$, donc en supposant $\forall\, \varphi \in E^*,\ \varphi(x) = 0$, on a nécessairement $x = 0_E$. ✎ (58) On a donc :

$$\forall x \in E,\ x = 0_E \iff \{\forall\, \varphi \in E^*,\ \varphi(x) = 0\}.$$

✎ (57) On remarquera que, pour $n \geqslant 2$, il y a une infinité de formes linéaires φ sur E telles que $\varphi(x) = 1$.

✎ (58) La réciproque est évidente.

Théorème 28

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $T = (\theta_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E^*.
Alors il existe une unique base $U = (\varepsilon_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ de E telle que $T = U^*$.
On dit que U est la **base anté-duale** de T.

☞ $\varphi : E \to \mathbb{K}^n,\ \varphi : x \mapsto (\theta_1(x), \ldots, \theta_n(x))$ est linéaire. ✎ (59)
On a $x \in \operatorname{Ker}\varphi$ si et seulement si $\theta_i(x) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Soit $\mathcal{B} = (e_i)$ une base de E et $\mathcal{B}^* = (e_i^*)$ sa base duale.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe une famille $(\lambda_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$ telle que $e_i^* = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \theta_j$.
$x \in \operatorname{Ker}\varphi$ implique $e_i^*(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, \theta_j(x) = 0$. Avec $x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i$, il vient $x = 0_E$, d'où $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$ et φ est alors un isomorphisme. ✎ (60)
En conséquence, il existe une unique famille $U = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_2) \in E^n$ telle que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \theta_j(\varepsilon_i) = \delta_{ij}$$

U est une base de E car c'est l'image par l'isomorphisme φ^{-1} de la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

✎ (59) Par linéarité des θ_i.

✎ (60) $\dim E = \dim \mathbb{K}^n$.

Exemple 11 Construction d'une base duale.

On considère les formes linéaires f_1, f_2 et f_3 sur $\mathbb{R}^3$ définies par :
$f_1(x) = x_1 + x_2 + x_3$, $f_2(x) = x_2 - x_3$ et $f_3(x) = 2x_1 - x_2 + x_3$ avec $x = (x_1, x_2, x_3)$.

a) Montrons que $T = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

Pour cela, considérons $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ telle que ✎ (61) $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$. Il vient ✎ (62)

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 & L_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 & L_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_3 \end{cases} \quad \text{donc ✎ (63)} \quad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

puis $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

b) Trouver la base U de $\mathbb{R}^3$ dont T est la duale c'est trouver les vecteurs u_1, u_2 et u_3 tels que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, 3]\!]^2,\ f_j(u_i) = \delta_{ij}$$

Nous sommes conduits à la résolution des trois systèmes : ✎ (64)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_2 - x_3 = b \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = c \end{cases}$$

avec, successivement, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On obtient : $u_1 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $u_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$, $u_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

✎ (61) Il suffit de montrer que cette famille de 3 vecteurs est libre.

✎ (62) En prenant les images par $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

✎ (63) $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

✎ (64) Rappelons que l'existence et l'unicité d'un tel système sont assurées. Il reste à calculer les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de ces vecteurs.

Copyrighted material

2.2 – Équation d'un hyperplan

Théorème 29

E est rapporté à la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et pour tout x de E, on écrit : $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

a) Tout hyperplan H de E admet une équation de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \quad \text{avec} \quad (a_1,\ldots,a_n)\in \mathbb{K}^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}$$

b) Toute équation de la forme précédente représente un hyperplan.

☞ a) Si H est un hyperplan, il existe une forme linéaire non nulle u sur E telle que $H=\operatorname{Ker} u$.
Sur la base duale de $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on a :

$$u=\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^* \quad \text{avec} \quad (a_1,\ldots,a_n)\in \mathbb{K}^n\setminus\{0,\ldots,0\}$$

d'où pour tout $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ de E : $\quad x\in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$.

b) L'ensemble $H=\left\{x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \;/\; \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\right\}$ est le noyau de la forme linéaire

$u=\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*$ qui est non nulle d'après l'hypothèse $(a_1,\ldots,a_n)\neq(0,\ldots,0)$.

Exemple 12 Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique, équation du plan $P=\operatorname{Vect}(u_1,u_2)$ engendré par les vecteurs $u_1=(1,-1,2)$ et $u_2=(2,3,5)$.

u_1 et u_2 ne sont évidemment pas liés. $P=\operatorname{Vect}(u_1,u_2)$ est donc bien un plan c'est-à-dire aussi un hyperplan dans le cas de $\mathbb{R}^3$.

Un vecteur $v=(x,y,z)$ appartient à P si et seulement si (u_1,u_2,v) est lié, donc si et seulement si : ✎ (65) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 3 & y \\ 2 & 5 & z \end{vmatrix}=0$.

Ce qui donne $11x+y-5z=0$.

✎ (65) Les déterminants d'ordre inférieur ou égal à 3 ont été étudiés en PCSI.

2.3 – Systèmes libres de formes linéaires

Théorème 30

Systèmes libres de E^*

Soit $(\theta_i)_{i\in[\![1,p]\!]}\in (E^*)^p$ et $v : E\to\mathbb{K}^p,\ x\mapsto\big(\theta_1(x),\theta_2(x),\ldots,\theta_p(x)\big)$.

a) v est linéaire avec $\operatorname{Ker} v=\bigcap_{i=1}^{p}\operatorname{Ker}\theta_i$.

b) Si $p=n$ et si $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)$ est une base de E^*, v est un isomorphisme de E sur $\mathbb{K}^n$.

c) 1) La famille $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_p)$ est libre si et seulement si $v\in\mathcal{L}(E,\mathbb{K}^p)$ est surjective.

2) Si $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_p)$ est libre, $\operatorname{Ker} v$ est de dimension $n-p$ et on a pour tout $\theta\in E^*$:

$$\theta\in\operatorname{Vect}\big(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_p\big)\iff\forall x\in\operatorname{Ker} v,\ \theta(x)=0\iff\operatorname{Ker} v\subset\operatorname{Ker}\theta$$

☞ a) Sans difficulté.

b) C'est le théorème **28**.

Copyrighted material

c) 1) Si $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)$ est libre, on la complète en une base de E^*, $(\theta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dont on note $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base duale. On a alors : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \theta_j(\varepsilon_i) = \delta_{i,j}$ donc $\big(v(\varepsilon_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et v est surjective.

Si v est surjective, il existe $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E^p$ tel que $\big(v(x_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant p}$ soit la base canonique de $\mathbb{K}^p$, donc telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ \ \theta_j(x_i) = \delta_{ij}$$

Alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \theta_j = 0$, donne $\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, \theta_j(x_i) = \lambda_i = 0.$

Donc $\big(\theta_1, \ldots, \theta_p\big)$ est libre.

2) On complète la famille libre $(\theta_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ en une base $(\theta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E^*, dont la base duale est notée $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Puisque v est surjective, $\dim \operatorname{Ker} v = \dim E - \operatorname{rg} v = n - p$.

Les $n-p$ vecteurs $\varepsilon_{p+1}, \ldots, \varepsilon_n$ de $\operatorname{Ker} v$ constituent donc une base de $\operatorname{Ker} v$.

Pour tout $\theta \in E^*$, on a $\ \theta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \theta(\varepsilon_i)\varepsilon_i^* = \sum_{i=1}^{n} \theta(\varepsilon_i)\,\theta_i$ d'où on déduit :

$$\begin{aligned}
\theta \in \operatorname{Vect}\big(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p\big) &\iff \forall\, i \in [\![p+1, n]\!],\ \ \theta(\varepsilon_i) = 0 \\
&\iff \operatorname{Vect}\big(\varepsilon_{p+1}, \ldots, \varepsilon_n\big) \subset \operatorname{Ker}\theta \\
&\iff \operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker}\theta
\end{aligned}$$

Corollaire

Critère d'indépendance d'un système de formes linéaires

Le système $(\theta_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est libre si et seulement si : [66]

$$\dim \bigcap_{1\leqslant i\leqslant p} \operatorname{Ker}\theta_i = n - p.$$

[66] v est surjective si et seulement si $\dim \operatorname{Ker} v = n-p$.

Exemple 13

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des scalaires distincts et

$$\theta_i : E \to \mathbb{K},\ \ P \mapsto P(a_i),\ \ 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Un polynôme $P \in \displaystyle\bigcap_{0\leqslant i\leqslant n} \operatorname{Ker}\theta_i$ a $n+1$ racines distinctes. Avec $\deg P \leqslant n$, il vient $P = 0$.

On en déduit [67] que le système $(\theta_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre et donc [68] une base de E^*.

[67] D'après le corollaire précédent.

[68] Car $\dim E^* = n+1$.

Copyrighted material

L'essentiel

I. Espaces vectoriels et algèbres

✔ **Si l'on veut** prouver la linéarité d'une application,

- **on doit** préciser le corps des scalaires.

✔ **Si l'on veut** étudier le noyau et l'image d'une application linéaire,

- **on peut** calculer le déterminant dans une base pour distinguer les cas à étudier,
- **on peut** traiter directement les cas simples et faire appel à un système linéaire dans les autres.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 1

✔ **Si l'on veut** montrer qu'un sous-ensemble n'est pas un sous-espace d'un espace vectoriel,

- **on peut** vérifier que ce n'est pas une partie stable pour l'addition.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 2

✔ Les premières algèbres rencontrées sont les polynômes sur un corps et les endomorphismes d'un espace vectoriel. Ces deux notions se retrouvent mêlées dans les polynômes d'endomorphismes.

✔ **Si l'on veut** montrer qu'un sous-ensemble d'une $\mathbb{K}$-algèbre est une sous-algèbre,

- **on peut** distinguer ce qui est relatif au produit interne de ce qui ressort de la structure de sous-espace vectoriel.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 3

II. Somme de sous-espaces vectoriels

✔ Les sommes directes de deux sous-espaces, vues en première année, sont étendues à plusieurs sous-espaces.

✔ **Si l'on veut** montrer qu'une somme $\sum F_i$ de sous-espaces de E est directe,

- **on peut** se servir de la principale caractérisation en montrant que, pour $x_i \in F_i$, $\sum x_i = 0 \Rightarrow \forall i,\ x_i = 0$, en procédant éventuellement par récurrence.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 4

- **on peut** montrer que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x_i \in F_i$, $x = \sum x_i$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 5

- **on peut** pour une somme de deux sous-espaces, utiliser des informations sur les dimensions.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 6

Copyright

Méthodes

III. Endomorphismes nilpotents

✔ Les endomorphismes nilpotents sont d'usage particulièrement simple en privilégiant des bases adaptées.

✔ Le théorème du rang est fondamental en dimension finie.

✔ **Si l'on veut** étudier un endomorphisme nilpotent u,

▪ **on peut** observer que l'endomorphisme induit par u sur un sous-espace stable est encore nilpotent.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 7

✔ **Si l'on veut** calculer une puissance d'une matrice A,

▪ **on peut** chercher à déceler le cas particulier où A se décompose en $A = D+N$, avec D diagonale, N nilpotente, D et N permutables.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 8

IV. Calcul du rang

✔ La méthode du pivot de Gauss est une méthode de base.

▪ **on peut** chercher des particularités qui allègent la procédure de base.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 9

V. Polynômes de Lagrange

✔ Ce thème a été vu en cours sous un aspect linéaire.
On peut l'étudier sous un aspect algébrique polynomial.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 11

✔ Exemple d'application au calcul du reste dans la division par un polynôme scindé à racines simples.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 12

Copyrighted material

Mise en œuvre

I. Espaces vectoriels et algèbres

Ex. 1

Étant donné $a \in \mathbb{C}^*$, montrer que $\begin{cases} f : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & z + a\overline{z} \end{cases}$ est $\mathbb{R}$-linéaire mais pas $\mathbb{C}$-linéaire.

Déterminer son noyau et son image.

Indications

$\mathbb{C}$ est un espace de dimension 1 sur lui-même. Ses endomorphismes sont les homothéties.

$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, de base $(1, i)$.

Solution

1) On a $f(1) = 1 + a$ et $f(i) = (1 - a)i$. Avec $i = i \times 1$,

la $\mathbb{C}$-linéarité demanderait $(1 - a)i = i(1 + a)$

c'est-à-dire $a = 0$, contrairement à l'hypothèse $a \in \mathbb{C}^*$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on a $f(z_1 + \lambda z_2) = (z_1 + \lambda z_2) + a\,\overline{z_1 + \lambda z_2}$

donc $f(z_1 + \lambda z_2) = \left(z_1 + a\overline{z_1}\right) + \lambda\left(z_2 + a\overline{z_2}\right)$

et finalement $f(z_1 + \lambda z_2) = f(z_1) + \lambda f(z_2)$.

2) Avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(1 + a)x = 0$ et $(1 - a)y = 0$, on peut distinguer :

- $a = -1$: $f(x + iy) = 2iy$, donc $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}$. L'image est $i\mathbb{R}$.
- $a = 1$: $f(x + iy) = 2x$, donc $\operatorname{Ker} f = i\mathbb{R}$. L'image est $\mathbb{R}$.

Avec $a = \alpha + i\beta$ et $z = x + iy$, on a $f(z) = (\alpha+1)x + \beta y + i\left(\beta x + (1-\alpha)y\right)$.

Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & \beta \\ \beta & 1 - \alpha \end{pmatrix}$. On a $\det A = 1 - \alpha^2 - \beta^2 = 1 - |a|^2$.

Si $1 - \alpha^2 - \beta^2 \neq 0$, alors f est bijective. Le cas où $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\beta = 0$, a été vu.

Étudions le cas où $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, avec $\beta \neq 0$.

(x, y) est solution de $\begin{cases} (\alpha + 1)x + \beta y = 0 \\ \beta x + (1 - \alpha)y = 0 \end{cases}$ quand $y = -\dfrac{\beta\, x}{1 - \alpha}$, soit

$x + iy = (1 - a)\dfrac{x}{1 - \alpha}$ et le noyau est $(1 - a)\mathbb{R}$.

$\beta^2 = 1 - \alpha^2$ donne $\dfrac{\beta}{1 - \alpha} = \dfrac{1 + \alpha}{\beta}$ donc $f(z) = (a + 1)\dfrac{(\alpha + 1)x + \beta y}{\alpha + 1}$

Alors $\operatorname{Im} f = (1 + a)\mathbb{R}$ puisque $\dfrac{(\alpha + 1)x + \beta y}{\alpha + 1}$ décrit $\mathbb{R}$.

Commentaires

$f(i) = f(i \times 1) = i f(1)$.

λ réel est essentiel.

f est $\mathbb{R}$-linéaire.

$f(x+iy) = (1+a)x + (1-a)iy$.

$a \neq 0$.

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Matrice de f dans la base $(1, i)$.

$\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.

Et donc $|\alpha| \neq 1$.

Étude du noyau de f.

Image d'une forme linéaire non nulle.

Ex. 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de sous-espaces de E.

1) Montrer que si $\bigcup_{k=1}^{p} F_k$ est un sous-espace vectoriel de E, alors il existe $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$ tels que $i\neq j$ et $F_i\subset F_j$.

2) Montrer que $\bigcup_{k=1}^{p} F_k = E$ si et seulement si un des F_k est E lui-même.

Solution

1) Pour $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, soit la propriété $\mathcal{P}(n)$: si la réunion d'une famille finie $(F_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ de sous-espaces de E est un sous-espace, alors il existe $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $i\neq j$ et $F_i\subset F_j$.

Montrons que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces de E tels que $F_1\cup F_2$ soit un sous-espace. On a alors $F_1\cup F_2 = F_1+F_2$; en effet, $F_1\cup F_2$ étant un sous-espace de E, on a $\text{Vect}(F_1\cup F_2) = F_1\cup F_2$.

En supposant $F_1\not\subset F_2$, il existe $x_1\in F_1$, $x_1\notin F_2$ et pour tout $x_2\in F_2$, le vecteur x_1+x_2 appartient à F_1+F_2 donc à $F_1\cup F_2$; c'est-à-dire $x_1+x_2\in F_1$ ou $x_1+x_2\in F_2$.

L'éventualité $x_1+x_2 = x_2'\in F_2$ est à rejeter puisqu'alors on aurait $x_1 = x_2'-x_2\in F_2$. Le seul cas possible est donc $x_1+x_2 = x_1'\in F_1$ ce qui donne $x_2 = x_1'-x_1\in F_1$.

On a ainsi établi que si $F_1\not\subset F_2$ alors $F_2\subset F_1$ et donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

On suppose maintenant que $\mathcal{P}(n-1)$ est vraie, avec $n\geqslant 3$, et soit $(F_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de sous-espaces telle que $U_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ soit un sous-espace.

Supposons que $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i\neq j \Rightarrow F_i\not\subset F_j$.

D'après $\mathcal{P}(n-1)$, la réunion $U_{n-1} = \bigcup_{k=1}^{n-1} F_k$ n'est alors pas un sous-espace vectoriel de E et on a donc :

$$U_{n-1}\subsetneq S = \sum_{k=1}^{n-1} F_k$$

ce qui assure l'existence d'un élément x de S n'appartenant pas à U_{n-1} :

$$x\in S, x\notin U_{n-1}.$$

Envisageons alors deux cas : $x\in F_n$ ou $x\notin F_n$.

▪ Premier cas : $x\in F_n$

Puisque $F_1\not\subset F_n$, il existe un élément y tel que $y\in F_1$ et $y\notin F_n$ et on remarque que pour tout $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$, $z=\lambda x+y\notin F_1\cup F_n$. En effet, si $z\in F_1$, alors $x=\frac{1}{\lambda}(z-y)\in F_1$ donc $x\in U_{n-1}$, c'est exclu ; et si $z\in F_n$, alors $y=z-\lambda x\in F_n$, c'est exclu.

D'autre part, U_n étant un sous-espace vectoriel contenant $F_1\cup F_n$, il contient x et y et :

$$\text{pour tout } \lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\},\ z=\lambda x+y\in U_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$$

Commentaires

Démonstration par récurrence sur n pour $n\geqslant 2$.

On se propose de montrer par l'absurde l'existence de (i,j) tels que $i\neq j$ et $F_i\subset F_j$.

Copyrighted material

et donc, finalement, pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, il existe $i_\lambda \in [\![2, n-1]\!]$ tel que :

$$z = \lambda x + y \in F_{i_\lambda}$$

$[\![2, n-1]\!]$ est fini, alors que $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ est infini, donc l'application $\lambda \mapsto i_\lambda$ n'est pas injective, et il existe λ et μ dans $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ tels que $\lambda \neq \mu$ et $i_\lambda = i_\mu$. Alors $\lambda x + y$ et $\mu x + y$ sont éléments de F_{i_λ} donc $(\lambda - \mu)x \in F_{i_\lambda}$ ce qui, avec $\lambda - \mu \neq 0$, donne $x \in F_{i_\lambda}$ donc $x \in U_{n-1}$. C'est en contradiction avec le choix de x.

▪ Deuxième cas : $x \notin F_n$

Alors $x \notin U_n$ (car on sait déjà que $x \notin U_{n-1}$ et $U_n = U_{n-1} \cup F_n$) puis, sachant que $x \in S$, il existe :

$$x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, \dots, x_{n-1} \in F_{n-1} \text{ tels que } x = \sum_{k=1}^{n-1} k.$$

Ceci est en contradiction avec le fait que U_n est un sous-espace vectoriel. (Chacun des x_k est dans U_n mais leur somme x n'est pas dans U_n.)

Dans les deux cas, on a une situation contradictoire. Il existe donc i, j tels que $i \neq j$ et $F_i \subset F_j$.

On a ainsi prouvé que $\mathcal{P}(n-1) \Rightarrow \mathcal{P}(n)$. Il en résulte que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

2) La condition annoncée est évidemment suffisante, il reste à prouver qu'elle est nécessaire.

Soit la propriété $\mathcal{Q}(n)$: si la réunion $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ d'une famille de n sous-espaces de E est un sous-espace alors l'un des F_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, contient tous les autres. La propriété $\mathcal{Q}(2)$ est vraie ($\mathcal{Q}(2)$ n'est autre que $\mathcal{P}(2)$).

Supposons $\mathcal{Q}(n-1)$ vraie et soit $(F_k)_{k \in [\![1, n]\!]}$ une famille de n sous-espaces telle que $U = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ soit encore un sous-espace de E. Alors d'après le 1), il existe i et j dans $[\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$ et $F_i \subset F_j$. À un réindexation près, on peut supposer $i = n$ et donc $j \leqslant n-1$ et on obtient :

$$U = \bigcup_{k=1}^{n} F_k = \bigcup_{k=1}^{n-1} F_k.$$

Sachant que U est un sous-espace de E, la propriété $\mathcal{Q}(n-1)$ donne que l'un des F_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$ contient tous les autres et donc contient aussi F_n. On a ainsi prouvé la propriété $\mathcal{Q}(n)$.

Finalement, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$ (par récurrence). Il est clair qu'elle l'est aussi pour $n = 1$, mais c'est sans grand intérêt.

Nouvelle démonstration par récurrence pour $n \geqslant 2$.

Ex. 3

1) Soit u élément d'une $\mathbb{K}$-algèbre A. Les puissances u^n, $n \in \mathbb{N}$, de u sont définies par récurrence en posant $u^0 = 1_A$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u \times u^n$. Prouver que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $u^p \times u^q = u^q \times u^p$.

2) Pour $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, avec $(a_k) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ (suite presque nulle), on pose $P(u) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k u^k$.

En notant $\mathbb{K}[u] = \{P(u) / P \in \mathbb{K}[X]\}$, prouver que $\mathbb{K}[u]$ est la sous-algèbre de A engendrée par u.

Indications

On met en œuvre les opérations dans A, en liaison avec les polynômes sur $\mathbb{K}$.

Cette $\mathbb{K}$-algèbre sera utile au chapitre 4 (réduction des endomorphismes).

Solution

1) La propriété est claire si p ou q est nul.

a) Supposons $u \times u^{p-1} = u^{p-1} \times u = u^p$. Alors :

$u^{p+1} = u \times u^p = u \times \left(u^{p-1} \times u\right) = \left(u \times u^{p-1}\right) \times u = u^p \times u.$

D'où par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N},\ u \times u^p = u^p \times u = u^{p+1}$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons : $u^p \times u^{q-1} = u^{q-1} \times u^p = u^{p+q-1}$.

Alors, avec a), $u^p \times u^q = u^p \times \left(u^{q-1} \times u\right) = \left(u^p \times u^{q-1}\right) \times u = u^{p+q-1} \times u$

puis avec a) de nouveau : $u^p \times u^q = u^{p+q} = u \times u^{p+q-1} = u \times \left(u^{q-1} \times u^p\right) = \left(u \times u^{q-1}\right) \times u^p = u^q \times u^p$

D'où par récurrence : $\forall q \in \mathbb{N},\ u^p \times u^q = u^q \times u^p$.

Finalement : $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ u^p \times u^q = u^q \times u^p = u^{p+q}$.

2) $\mathbb{K}[u]$ contient u. Montrons que c'est une sous-algèbre de A.

- pour $P = 1$ on a $1(u) = u^0 = 1_A$ donc $1_A \in \mathbb{K}[u]$,
- soit $P(u) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k u^k$ et $Q(u) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k u^k$ des éléments

de $\mathbb{K}[u]$ associés aux polynômes $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k X^k$.

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ \alpha P(u) + \beta Q(u) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\alpha a_k + \beta b_k) u^k = (\alpha P + \beta Q)(u)$

donc $\alpha P(u) + \beta Q(u) \in \mathbb{K}[u]$.

D'autre part : $P(u) \times Q(u) = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i u^i\right) \times \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j u^j\right)$.

$$P(u) \times Q(u) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} a_i b_j u^i \times u^j = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} a_i b_j u^{i+j}.$$

$P(u) \times Q(u) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) u^k$. Or $PQ = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) X^k$

donc $P(u) \times Q(u) = (PQ)(u)$. Ce qui prouve que $P(u) \times Q(u) \in \mathbb{K}[u]$.

Toute sous-algèbre de A contenant u, contient toute puissance k de u donc elle contient aussi tout élément $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k u^k$ de $\mathbb{K}[u]$.

Finalement, $\mathbb{K}[u]$ est la plus petite sous-algèbre de A contenant u.

Remarque : $P(u) \times Q(u) = (PQ)(u)$ or $PQ = QP$ donc

$P(u) \times Q(u) = Q(u) \times P(u)$.

Commentaires

Par exemple, si $q=0$, alors $u^q = 1_A$ et $1_A \times u^p = u^p \times 1_A = u^p$.

La propriété est vraie pour $p=0$.

La propriété est vraie pour $q=0$.

Pour $P=X$ on a $X(u)=u^1=u$.

Contrairement aux apparences ce sont des sommes finies.

Règles de calcul dans une $\mathbb{K}$-algèbre et compte tenu du 1).

En posant $k=i+j$.

Produit de P et Q dans $\mathbb{K}[X]$.

Car c'est en particulier un sous-espace vectoriel.

La sous-algèbre $\mathbb{K}[u]$ de A est donc commutative.

II. Somme de sous-espaces vectoriels

Ex. 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, n scalaires deux à deux distincts ($n \geqslant 2$).

Montrer que, si $\forall i \in [\![1, n]\!],\ F_i = \operatorname{Ker}\left(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E\right)$, alors la somme $F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ est directe.

Indications

C'est un cas particulier important de la réduction des endomorphismes qui sera vue au chapitre 5.

On procède par récurrence sur n.

Copyrighted material

Solution

Montrons d'abord que la propriété est vraie pour $n = 2$.
Soit $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$ tels que $x_1 + x_2 = 0_E$ **(1)**
$x_i \in F_i$ se lit $f(x_i) = \lambda_i x_i$; il vient alors $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0_E$ **(2)**
On multiplie **(1)** par λ_2 et on retranche membre à membre avec **(2)**, il vient :

$$(\lambda_1 - \lambda_2)x_1 = 0_E \text{ donc } x_1 = 0_E.$$

Alors **(1)** donne $x_2 = 0_E$.

Ainsi $\forall (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$, $x_1 + x_2 = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2 = 0_E$.

Supposons que la propriété soit vraie pour $n - 1$ scalaires.
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, des scalaires deux à deux distincts et $x_1, \dots, x_n$, des vecteurs tels que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i \in F_i \text{ et } x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0_E \quad \textbf{(3)}.$$

La relation **(3)** donne $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E$ **(4)**.

Il s'ensuit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_n) x_i = 0_E$.

On en déduit : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $(\lambda_i - \lambda_n) x_i = 0_E$, donc :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad x_i = 0_E \text{ car } \lambda_i - \lambda_n \neq 0.$$

Alors **(3)** donne enfin $x_n = 0_E$. La somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i$ est donc directe.

Commentaires

Début de la récurrence sur n.

On applique f aux deux membres de **(1)**.

car $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$.
La somme $F_1 + F_2$ est donc directe.

Pour montrer qu'elle est récurrente.

En appliquant f.

Par combinaison linéaire de **(3)** et **(4)**.

D'après l'hypothèse de récurrence.

Ce qui achève la récurrence.

Ex. 5

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 = \mathrm{Id}_E$. Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - j\,\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - j^2\,\mathrm{Id}_E)$$

Indications

On montre que tout x de E peut s'écrire $x = x_1 + x_2 + x_3$ d'une manière unique avec :

$$x_1 \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) \quad , \quad x_2 \in \mathrm{Ker}\,(f - j\,\mathrm{Id}_E) \quad , \quad x_3 \in \mathrm{Ker}\,(f - j^2\,\mathrm{Id}_E)$$

Solution

▪ Analyse

Supposons que (x_1, x_2, x_3) soit solution de ce problème, on obtient alors :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= x && \textbf{(1)} \\ x_1 + jx_2 + j^2 x_3 &= f(x) && \textbf{(2)} \\ x_1 + j^2 x_2 + jx_3 &= f^2(x) && \textbf{(3)} \end{aligned}$$

Par combinaison linéaire de **(1)**, **(2)** et **(3)**, on déduit :

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(x + f(x) + f^2(x)\right) \quad , \quad x_2 = \frac{1}{3}\left(x + j^2 f(x) + j f^2(x)\right), \text{ et}$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\left(x + j f(x) + j^2 f^2(x)\right).$$

Le triplet (x_1, x_2, x_3) est ainsi la seule solution possible.

▪ Synthèse

Le triplet (x_1, x_2, x_3) ci-dessus vérifie $x_1 + x_2 + x_3 = x$. De plus :

$$f(x_1) = \frac{1}{3}\left(f(x) + f^2(x) + f^3(x)\right) = \frac{1}{3}\left(x + f(x) + f^2(x)\right) = x_1,$$

$$f(x_2) = \frac{1}{3}\left(f(x) + j^2 f^2(x) + j f^3(x)\right) = \frac{1}{3}\left(jx + j^3 f(x) + j^2 f^2(x)\right) = jx_2,$$

Commentaires

Condition nécessaire.

en appliquant f à **(1)**
en appliquant f à **(2)**.

Sachant que $1 + j + j^2 = 0$.

Condition suffisante.

puisque $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

$f(x_3) = \frac{1}{3}\left(f(x) + jf^2(x) + j^2f^3(x)\right) = \frac{1}{3}\left(j^2x + j^3f(x) + j^4f^2(x)\right) = j^2x_3.$

Donc (x_1, x_2, x_3) est bien solution du problème et on a :

$$E = \operatorname{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f - j\,\mathrm{Id}_E\right) \oplus \left(f - j^2\,\mathrm{Id}_E\right).$$

Ex. 6

Soit f et g des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

On suppose que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ et $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$. Montrer que ces deux sommes sont directes.

Indications

Cet exercice est un grand classique. Il met à la fois en œuvre le théorème du rang et une caractérisation de deux sous-espaces supplémentaires qui utilise leurs dimensions.

Solution

$\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E$ donne $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \geqslant n$,
et $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E$ donne $(n - \operatorname{rg} f) + (n - \operatorname{rg} g) \geqslant n$, donc $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leqslant n$.

Il en résulte $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = n$. Avec $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E$, on a $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g = E$.
On a aussi $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Ker} g) = \dim E$; avec $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E$, il vient $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} g = E$.

Commentaires

$\dim U + \dim V \geqslant \dim(U+V)$.
Théorème du rang.

Deux sous-espaces U et V sont supplémentaires si et seulement si $E = U+V$ et $\dim U + \dim V = \dim E$.

III. Endomorphismes nilpotents

Ex. 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que u est nilpotent et que $\dim(\operatorname{Ker} u) = 1$.

1) Étant donné un sous-espace vectoriel F non nul et stable par u, montrer que $\dim u(F) = \dim F - 1$.

2) Montrer que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\dim(\operatorname{Ker} u^k) = k$ et $\operatorname{rg} u^k = n - k$.

3) Déterminer tous les sous-espaces de E stables par u.

Indications

1) Théorème du rang pour l'endomorphisme de F induit par u.

2) Il suffit de montrer que $\operatorname{rg} u^k = n - k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. C'est d'ailleurs vrai pour $k = 0$ avec $u^0 = \mathrm{Id}$.

3) Les sous-espaces $\operatorname{Ker} u^k$ sont stables par u.

Solution

1) Soit $\overline{u}$ l'endomorphisme de F induit par u.
Rappelons que $\operatorname{Ker} \overline{u} = F \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} \overline{u} = u(F)$.
Comme u est nilpotent, il en est de même pour $\overline{u}$.
Alors $\dim \operatorname{Ker} \overline{u} \geqslant 1$, donc $\operatorname{Ker} \overline{u} = \operatorname{Ker} u$.
Il s'ensuit $\dim F - 1 = \operatorname{rg} \overline{u} = \dim u(F)$.

2) Supposons que $\operatorname{rg} u^k = n - k$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Cette propriété est vraie pour $k = 1$: $\operatorname{rg} u = \dim u(E) = \dim E - 1$.
Avec $u\left(\operatorname{Im} u^k\right) = \operatorname{Im} u^{k+1} \subset \operatorname{Im} u^k$, on applique le résultat de la première question à $F = \operatorname{Im} u^k$.
Il vient alors $\operatorname{rg}(u^{k+1}) = \operatorname{rg}(u^k) - 1 = n - k - 1$.
Remarque : l'indice de nilpotence de u est égal à n.
Il s'ensuit alors $\dim(\operatorname{Ker} u^k) = k$.

Commentaires

F est stable par u.

$\operatorname{Ker} \overline{u} \subset \operatorname{Ker} u$ et $\dim(\operatorname{Ker} u) = 1$.
Théorème du rang pour $\overline{u}$.
Pour une preuve par récurrence.
Question précédente.

$\dim u(\operatorname{Im} u^k) = \dim \operatorname{Im}(u^k) - 1$.
$\operatorname{Im} u^n = \{0\}$ et $\operatorname{rg}(u^{n-1}) = 1$.
Théorème du rang pour u^k.

Copyrighted material

3) Les sous-espaces $\operatorname{Ker} u^k$ sont stables par u. Soit F un sous-espace stable par u ; posons $p = \dim F$. Pour $p \geqslant 1$, l'endomorphisme $\overline{u}$ de F induit par u est nilpotent, donc $\overline{u}^p = 0$. Cela nous donne $F \subset \operatorname{Ker} u^p$. Avec l'égalité des dimensions, il vient $F = \operatorname{Ker} u^p$.
Remarque : $u^n = 0$ se lit $u^k u^{n-k} = 0$, c'est-à-dire $\operatorname{Im} u^{n-k} \subset \operatorname{Ker} u^k$. Avec l'égalité des dimensions, il vient $\operatorname{Im} u^{n-k} = \operatorname{Ker} u^k$.

Une piste : ce sont peut-être les seuls !
Pour $p=0$, $F=\{0\}=\operatorname{Ker} u^0$.
L'indice de nilpotence est au plus égal à $\dim F$.
$\dim(\operatorname{Ker} u^k)=k$.

Ex. 8

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice i. Montrer que $i \leqslant n$.
Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente si et seulement si $A^n = 0$.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, triangulaire supérieure stricte, c'est-à-dire : $A = [a_{ij}]$ avec $(i \geqslant j \Rightarrow a_{ij} = 0)$.
Montrer que A est nilpotente.

3) Calculer A^n pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Indications

L'indice de nilpotence d'une matrice carrée se définit comme celui d'un endomorphisme.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. L'indice de nilpotence de A est celui de f.

Solution

1) L'étude des endomorphismes nilpotents donne les résultats annoncés.

2) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} f$. Avec $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$,

$$\forall j \in [\![2, n]\!],\ f(e_j) \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{j-1}),\ f(e_1) = 0.$$

On en déduit, pour $3 \leqslant j \leqslant n$:

$$f^2(e_j) \in \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_{j-1})) \subset \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{j-2}),$$

$$\forall j \in [\![3, n]\!],\ f^2(e_j) \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{j-2}),\ \text{et } f^2(e_1) = f^2(e_2) = 0.$$

$$\forall j \in [\![k+1, n]\!],\ f^k(e_j) \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{j-k}),$$

$$f^k(e_1) = f^k(e_2) = \ldots = f^k(e_k) = 0.$$

D'où pour $k = n$, $f^n(e_1) = f^n(e_2) = \ldots = f^n(e_n) = 0$
c'est-à-dire $f^n = 0$ et donc $A^n = 0$.

3) On a $A = I_3 + B$ où $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Avec $B^3 = 0$, la formule du binôme donne : $A^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k = I_3 + nB + \dfrac{n(n-1)}{2} B^2$.

Avec $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, il vient $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Commentaires

Corollaire 2 de la propriété 26.

$\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{K}^n$.

A est triangulaire supérieure stricte.

Par récurrence.

B nilpotente d'après le 2).

I_3 et B sont permutables.

IV. Calcul du rang

Ex. 9

$E = \mathbb{R}^5$ et $F = \mathbb{R}^4$ sont rapportés à leurs bases canoniques $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant 5}$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ définie par $\operatorname{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} f = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & -6 \\ 3 & 4 & -3 & -4 & 1 \\ 3 & -10 & 9 & 16 & 35 \end{pmatrix}$. Calculer le rang de f, former une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$.

Copyright © Dunod

Indications

L'outil de travail principal est la méthode du pivot de Gauss.

Parfois, des remarques judicieuses allègent la démarche.

Le recherche d'une base de l'image de f est intimement liée à la détermination du rang.

Solution

1) Les colonnes de la matrice A représentent les vecteurs $f(e_j)$, $1 \leqslant j \leqslant 5$.

Notons pour simplifier $f(e_j) = u_j$ et appliquons la méthode du pivot :

$$\operatorname{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = \operatorname{rg}(u_1, u_2, u_3 - u_1, u_4 - 2u_1, u_5 - 5u_1).$$

d'où $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A_1$ avec $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & -6 \\ 3 & 4 & -6 & -10 & -14 \\ 3 & -10 & 6 & 10 & 20 \end{pmatrix}$.

En introduisant $u_3 - u_1 = 3(-e'_2 - 2e'_3 + 2e'_4)$ **(1)**,
et $u_4 - 2u_1 = 5(-e'_2 - 2e'_3 + 2e'_4)$ **(2)**

Les colonnes col (3) et col (4) de A_1 sont visiblement proportionnelles.

il vient $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A_2$, avec $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 & -7 \\ 3 & -10 & 2 & 10 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(u_1, u_2, u'_3, u'_4)$ avec $u'_3 = \frac{1}{3}(u_3 - u_1)$, $u'_4 = \frac{1}{2}(u_5 - 5u_1)$.

Ensuite, $\operatorname{rg}(u_1, u_2, u'_3, u'_4) = \operatorname{rg}(u_1, u_2, u'_3 + u_2, u'_4 + 3u_2)$,

De nouveau, la méthode du pivot.

d'où $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A_3$ avec $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -10 & -8 & -20 \end{pmatrix}$.

Avec $u'_3 + u_2 = 2(e'_3 - 4e'_4)$ **(3)** et $u'_4 + 3u_2 = 5(e'_3 - 4e'_4)$ **(4)**,

il vient $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(u_1, u_2, u'_3 + u_2) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & -10 & 8 \end{pmatrix}$.

On se ramène à une forme triangulaire.

c'est-à-dire $\operatorname{rg} f = 3$. Il en résulte $\dim \operatorname{Im} f = 3$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.

2) Avec les mêmes calculs,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u_1, u_2, u_3) &= \operatorname{rg}(u_1, u_2, u'_3) \\ &= \operatorname{rg}(u_1, u_2, u'_3 + u_2) = 3 \end{aligned} \quad \text{donc}$$

(u_1, u_2, u_3) est une base de $\operatorname{Im} f$. $u_1 = f(e_1) = 2e'_1 + 3e'_3 + 3e'_4$,

$u_2 = f(e_2) = e'_2 + 4e'_3 - 10e'_4$, $u_3 = f(e_3) = 2e'_1 - 3e'_2 - 3e'_3 + 9e'_4$.

3) Les égalités **(1)** et **(2)** donnent : $5(u_3 - u_1) - 3(u_4 - 2u_1) = 0$,

c'est-à-dire $f(e_1 + 5e_3 - 3e_4) = 0$ donc $\varepsilon_1 = e_1 + 5e_3 - 3e_4 \in \operatorname{Ker} f$.

Notons que dans la matrice A_1, on a : col (2) − col (4) + col (5) = 0.

On pourrait trouver un second vecteur du noyau en utilisant **(3)** et **(4)**.

$u_2 - u_4 + 2u_1 + u_5 - 5u_1 = 0$.

donc $f(-3e_1 + e_2 - e_4 + e_5) = 0$ d'où

$$\varepsilon_2 = -3e_1 + e_2 - e_4 + e_5 \in \operatorname{Ker} f.$$

Le système $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre et constitue donc une base de $\operatorname{Ker} f$.

Vérification immédiate.

Commentaires

Par exemple, $f(e_1) = 2e'_1 + 3e'_3 + 3e'_4$.

Copyrighted material

V. Polynômes de Lagrange

Ex. 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_0, \dots, x_n)$ une famille de $n+1$ éléments deux à deux distincts, dans un corps $\mathbb{K}$.

1) Montrer que, pour $i \in [\![0, n]\!]$, $L_i = \prod_{0 \leqslant k \leqslant n,\ k \neq i} \dfrac{X - x_k}{x_i - x_k}$ est l'unique élément de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :

(1) $\deg L_i \leqslant n$, **(2)** $L_i(x_i) = 1$, et **(3)** $\forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}$, $L_i(x_j) = 0$.

2) Montrer que, pour tout $(b_0, \dots, b_n) \in K^{n+1}$, il existe un unique $L \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\deg L \leqslant n \text{ et } \forall k \in [\![0, n]\!],\ L(x_k) = b_k.$$

3) Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(x_k) = b_k$?

Indications

Cette famille de polynômes, dits polynômes interpolateurs de Lagrange, a été vue sous un aspect linéaire (Cours, section D-5). On la met ici en place sous un aspect algébrique (polynômes).

Solution

1) Si L_i et M_i vérifient les propriétés **(1)**, **(2)** et **(3)**, leur différence est de degré au plus n et prend la valeur 0 en $n+1$ éléments distincts, c'est donc le polynôme nul.

Il est immédiat que L_i prend la valeur 1 en x_i et la valeur 0 en x_j, $j \neq i$.

2) L'unicité de L se prouve comme celle des L_i.

Le polynôme $b_k L_k$ prend la valeur b_k en x_k et la valeur 0 en x_j, $j \neq k$.

Alors le polynôme $L = \sum_{k=0}^{n} b_k L_k$ convient.

3) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ prenant la valeur b_k en x_k, pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Alors $P - L$ prend la valeur 0 en tout x_k, $k \in [\![0, n]\!]$.

Alors $P - L$ est un multiple de $\prod_{k=0}^{n} (X - x_k)$.

Tout polynôme $P = L + Q(X) \prod_{k=0}^{n} (X - x_k)$, avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ convient.

Commentaires

Unicité. C'est en général le premier point à étudier.

L_i est construit « sur mesure ».

On exploite les polynômes d'interpolation.

On a bien $\deg L \leqslant n$.

On a établi une condition nécessaire.

Condition suffisante.

Ex. 11

Soit a, b, c trois réels distincts et P dans $\mathbb{R}[X]$.

Calculer le reste dans la division de P par $(X-a)(X-b)(X-c)$.

Indications

Le reste R est de degré au plus égal à 2 et ses valeurs en a, b, c, sont respectivement $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$.

Solution

Posons $L_1 = \dfrac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}$ et L_2, L_3 par permutations circulaires.

$P = (X-a)(X-b)(X-c)Q + R$ donne $R(a) = P(a)$, $R(b) = P(b)$ et $R(c) = P(c)$.

Avec $\deg R \leqslant 2$, il s'ensuit $R = P(a)L_1 + P(b)L_2 + P(c)L_3$.

Commentaires

Polynômes interpolateurs de a, b, c.

Q et R dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice précédent, 2).

Copyright

Exercices

Pour les exercices faisant appel à la notion de matrice, on peut se référer à Algèbre – Géométrie, MPSIou PCSI, chapitre 11.

Niveau 1

Ex. 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f, g des endomorphismes de E tels que

$$f \circ g = 0 \text{ et } f + g \in \mathrm{GL}(E).$$

Montrer que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$.

Ex. 2

Déterminer les endomorphismes f d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E tels que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f$

1) quand $E = \mathbb{R}^2$,
2) quand $E = \mathbb{R}^3$,
3) quand $E = \mathbb{R}^4$.

Ex. 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 2.

Caractériser les endomorphismes de E dont le noyau et l'image ne sont pas supplémentaires.

Ex. 4

Soit u un endomorphisme de rang 1 d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer u^n en fonction de u.

Ex. 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et u, v des endomorphismes de E.

Montrer que si u et v commutent, le noyau et l'image de l'un est stable par l'autre.

Ex. 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et p un projecteur de E.

Montrer que u et p commutent si et seulement si le noyau et l'image de p sont stables par u.

Ex. 7

E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie,

soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \exists p(x) \in \mathbb{N}^*, f^{p(x)}(x) = 0$.

Montrer que f est nilpotent.

Ex. 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ avec $a \neq b$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(f - ae) \circ (f - be) = 0$ où $e = \mathrm{Id}_E$.

1) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, p et q projecteurs de E tels que :

   $f = bp + aq$, $p = \lambda(f - ae)$ et $q = \mu(f - be)$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer f^k à l'aide de p, q, a, b, k.

Niveau 2

Ex. 9

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et G un sous-espace de E. On pose

$$A = \{u \in \mathcal{L}(E, F),\ \mathrm{Ker}\, u \supset G\}.$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ et calculer sa dimension.

Ex. 10

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\dim E = 3$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = f^3$ et $\dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = 1$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \{0, 1\}$.

Ex. 11

Quelles sont les sous-algèbres de dimension finie de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Ex. 12

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que AB est idempotente.

   Calculer $\mathrm{rg}\, A$ et $\mathrm{rg}\, B$.

2) Montrer que $BA = I_2$.

Copyrighted material

Ex. 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$\operatorname{rg} f^2 = \operatorname{rg} f - \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) \quad (1)$$

2) En déduire : $\dim \operatorname{Ker} f^2 \leqslant 2 \dim \operatorname{Ker} f$ (2)

Ex. 14

Soit $(a_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ une famille de p réels distincts et $(m_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ une famille de p entiers naturels non nuls et tels que $\sum_{i=1}^{p} m_i = n+1$.

Montrer que les $n+1$ formes linéaires :

$\varphi_{i,j} : P \mapsto P^{(j-1)}(a_i)$ $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant m_i$

forment une base du dual E^* de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Ex. 15

Montrer qu'il existe $(a_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P = \sum_{k=1}^{n} a_k P(X+k).$$

Ex. 16

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et a non nul dans $\mathbb{K}$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f^3 - 2af^2 + a^2 f = 0$$

1) Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

2) Dans le cas où $\dim E = 3$, préciser la matrice de f dans une base adaptée à cette somme directe.

Niveau 3

Ex. 17

Soit $E = \mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \deg P \leqslant n\}$.

On fixe un polynôme P de degré n et $n+1$ nombre réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ deux à deux distincts.

Montrer que les polynômes $Q_k = P(X + a_k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ex. 18

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, soit $(f_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ une famille de n endomorphismes nilpotents et deux à deux permutables.

Montrer que $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ \ldots \circ f_n = 0$.

Ex. 19

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f^2 + 2f$ et on pose :

$$E_1 = \operatorname{Ker} f \ , \ E_2 = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$$

$$E_3 = \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E)$$

1) Prouver que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$.

2) On note p_1, p_2, p_3 les projecteurs associés à la somme directe précédente (p_i projection sur E_i parallèlement à $E_j \oplus E_k$).

Calculer f en fonction de p_1, p_2, p_3.

En déduire qu'il existe des suites réelles $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{\mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = a_n p_1 + b_n p_2 + c_n p_3$$

3) Prouver l'existence et calculer les suites réelles $(a'_n)_{\mathbb{N}^*}$, $(b'_n)_{\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{\mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = a'_n\,\mathrm{Id}_E + b'_n f + c'_n f^2$$

Ex. 20

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n.

On note $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \ / \ g \circ f = f \circ g\}$, $\mathcal{C}(f)$ est appelé le commutant de f.

1) Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

2) Soit $a \in E$ tels que $f^{(n-1)}(a) \neq 0$ et φ_a l'application de $\mathcal{C}(f)$ dans E définie par :

$$\forall g \in \mathcal{C}(f),\ \varphi_a(g) = g(a)$$

Montrer que φ_a est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

3) En déduire que $\mathcal{C}(f) = \operatorname{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$.

Ex. 21

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$, $f^2 \neq 0$.

1) Calculer le rang de f.

2) Montrer qu'il existe une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ de E telle que : $\operatorname{mat}_{(e_i)} f = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ex. 22

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n \in \mathbb{R}[X]$, de degré n, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos nx = T_n(\cos x)$$

Que peut-on dire de la famille $(T_n)_{0 \leqslant k \leqslant n}$?

2) Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $2n-1$ au plus. Montrer que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} P\left(\cos \frac{2k-1}{2n}\,\pi\right).$$

Copyrighted material

Avec éléments de solution

Ex. 23

1) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. On suppose que $f^2 = 0$ Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ et φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = \varphi(x)u$.

2) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$, $\operatorname{rg} f = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer f^n en fonction de f.

Ex. 24

Soit $(a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une famille strictement croissante de nombres réels.

Pour $k \in [\![0,3]\!]$, on considère l'espace $E_k(a)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de $[a_0, a_n]$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque segment $[a_{i-1}, a_i]$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est polynomiale de degré au plus 3.

Calculer la dimension de $E_k(a)$.

Ex. 25

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $u^n = \mathrm{Id}_E$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Étant donné un sous-espace vectoriel V stable par u et un projecteur p d'image V, on pose $q = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$.

1) Montrer que $q \circ u = u \circ q$ et en déduire que q est un projecteur.

2) Montrer que $q \circ p = p$.

3) Montrer que $\operatorname{Ker} q$ est un supplémentaire de V stable par u.

Ex. 26

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et P, Q dans $\mathbb{C}[X]$, $\deg P = n$ et $\deg Q = n$. Montrer l'équivalence de **(1)** et **(2)** :

(1) : P et Q ont une racine commune.

(2) : Il existe U et V non nuls dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que $UP + VQ = 0$.

2) Soit A et B dans $\mathbb{C}[X]$, $\deg A = \deg B = 2$. On considère

$\varphi : (\mathbb{C}_1[X])^2 \to \mathbb{C}_3[X],\ (U, V) \mapsto UA + VB$.

Montrer que φ est linéaire et écrire sa matrice dans des bases à choisir.

3) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A et B aient une racine commune.

Indications

Ex. 9

Utiliser un supplémentaire H de G dans E et, pour $u \in A$, la restriction u_H de u à H.

Ex. 10

f^2 est un projecteur.

Montrer que $\operatorname{Ker}(f^2 - \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

Ex. 11

Soit A une sous-algèbre de dimension finie de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Il faut montrer que A est constituée des fonctions constantes. Raisonner par l'absurde : en supposant f non constante, considérer la suite des puissances de f.

($f^2 = f \times f$, $f^3 = f \times f^2$, etc.)

Ex. 12

Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à B, et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Prouver que deux des vecteurs $g(\varepsilon_i)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Ex. 13

L'image de f^2 est aussi l'image de la restriction $f_{|\operatorname{Im} f}$.

Ex. 14

La famille $\left(\varphi_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant m_k}}$ est libre si et seulement si l'intersection des noyaux des $\varphi_{i,j}$ est réduite à $\{0_E\}$.

Copyrighted material

Ex. 15

Considérer l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $f(P) = P(X+1) - P(X)$. Former f^n de deux manières.

Ex. 16

1) Montrer que $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$.

2) Distinguer les cas $\operatorname{rg} f \in \{1, 2\}$ et $\operatorname{rg} f = 3$.

On pourra mettre en évidence un endomorphisme nilpotent de $\operatorname{Im} f$.

Ex. 17

Les polynômes dérivés $P^{(j)}(X)$, $0 \leqslant j \leqslant n$, forment une famille de degrés échelonnés.

Avec la formule de Taylor, exprimer $Q_k(X)$ à l'aide des $P^{(j)}(X)$.

Ex. 18

f_k induit un endomorphisme nilpotent de :

$$\operatorname{Im}\left(f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_{k-1}\right)$$

Ex. 19

1) Procéder par condition nécessaire pour trouver la seule décomposition possible d'un vecteur x de E sur $E_1 + E_2 + E_3$.

Ex. 20

$\left(a, f(a), \cdots, f^{n-1}(a)\right)$ est une base de E.

Ex. 21

Montrer que $\operatorname{rg} f = 2$.

Étudier f tel que $\operatorname{mat} f = A$.

Ex. 22

1) Il s'agit des polynômes de Tchebychev. Utiliser :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

2) Ne pas oublier de prouver l'intégrabilité sur $]-1, 1[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ (voir Analyse : Intégration sur un intervalle quelconque).

Des formes linéaires coïncident sur un espace vectoriel si et seulement si elles coïncident sur une base.

Ex. 23

1) Montrer que $f = 0$ ou bien $\operatorname{rg} f = 1$ et, dans ce cas, choisir une base de $\operatorname{Im} f$.

2) Seul $\operatorname{rg} f = 1$ est utile dans la première question.

Ex. 24

À $f \in E_k(a)$ on associe sa restriction à $[a_0, a_{n-1}]$. Étudier le noyau de l'application linéaire ainsi définie et lui appliquer le théorème du rang.

Ex. 25

1) Établir que $\operatorname{Im} q \subset V$.

3) Montrer que $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - p)$ et $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - q)$.

Ex. 26

2) Les bases canoniques s'imposent.

3) Faire intervenir la non-injectivité de φ.

Copyrighted material

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

$f \circ g = 0$ donne **(1)** $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ d'où **(2)** $\operatorname{rg} g \leqslant n - \operatorname{rg} f$.

$f + g \in \mathrm{GL}(E)$ donne $(f + g)(E) = E$. Avec $(f + g)(E) \subset f(E) + g(E)$, il vient $f(E) + g(E) = E$.

Alors $\dim f(E)+\dim g(E) = \dim\big(f(E)+g(E)\big)+\dim\big(f(E)\cap g(E)\big)$ donne **(3)** $\operatorname{rg} f+\operatorname{rg} g = n+\dim\big(f(E)\cap g(E)\big) \geqslant n$.

Avec **(2)** et **(3)**, il vient $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = n$, c'est-à-dire $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} g$.

L'inclusion **(1)** et l'égalité des dimensions donne enfin $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

Ex. 2

E étant de dimension finie n, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ donne $\operatorname{rg} f = n - \operatorname{rg} f$, donc $2 \operatorname{rg} f = n$.

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ implique $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$, c'est-à-dire $f \circ f = 0$ (ou $f^2 = 0$).

1) $n = \dim E = 2$ donne $\operatorname{rg} f = 1$, donc $f \neq 0$. Il existe $a \in E$ tel que $f(a) \neq 0$.

Notons $b = f(a)$. Alors $b \in \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ implique $f(b) = 0$.

La famille (a, b) est libre. (C'est une propriété classique des endomorphismes nilpotents.)

Alors $\mu b = 0$ donne $\mu = 0$ et $B = (a, b)$ est libre. C'est donc une base de E.

Dans la base B, la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Avec $A^2 = 0$, il vient $f^2 = 0$.

Les solutions sont les endomorphismes de rang 1 tels que $f^2 = 0$.

2) Il n'y a pas de solution puisque la condition nécessaire $2 \operatorname{rg} f = 3$ ne peut être satisfaite.

3) On a ici $\operatorname{rg} f = 2$. Soit (a, b) une base de $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

Il existe c et d tels que $f(c) = a$ et $f(d) = b$, avec $f(a) = f(b) = 0$ ($\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$).

$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d = 0$ implique $\alpha f(a)+\beta f(b)+\gamma f(c)+\delta f(d) = 0$, donc $\gamma f(c)+\delta f(d) = 0$, c'est-à-dire $\gamma a+\delta b = 0$.

Comme (a, b) est libre, il vient $\gamma = \delta = 0$ puis $\alpha a + \beta b = 0$ donc $\alpha = \beta = 0$.

$B = (a, b, c, d)$ est alors une famille libre, donc une base de $E = \mathbb{R}^4$.

Dans cette base, la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 = 0$ donne $f^2 = 0$.

Les solutions sont les endomorphismes de rang 2 tels que $f^2 = 0$.

Ex. 3

Soit f un endomorphisme tel que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ ne sont pas supplémentaires.

f n'est pas l'endomorphisme nul : sinon $\operatorname{Im} f = \{0\}$ et $\operatorname{Ker} f = E$ seraient en somme directe égale à E.

Pour la même raison f ne peut être de rang 2. Nécessairement, on a ainsi $\operatorname{rg} f = 1$.

Alors $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1. Comme deux droites vectorielles sont égales ou d'intersection nulle et que $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ ne sont pas en somme directe, on a $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$, donc $f^2 = 0$.

Réciproquement, si f et non nul $f^2 = 0$, de $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f \neq 0$ (donc $\operatorname{Ker} f \neq E$), on a $\operatorname{rg} f = 1$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.
Les sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont donc pas supplémentaires.

Ex. 4

$\operatorname{rg} u = 1$ se traduit par : il existe $a \in E$, $a \neq 0$, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(a)$.

Pour tout $x \in E$, il existe $\varphi(x) \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \varphi(x)a$. Montrons la linéarité de φ.

$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, $u(\lambda x) = \lambda(x)$ donne $\varphi(\lambda x)a = \lambda\, \varphi\,(x)a$, donc $\varphi(\lambda x) = \lambda\, \varphi\,(x)$.

$\forall (x, y) \in E^2$, $u(x + y) = u(x) + u(y)$ donne $\varphi(x + y)a = \varphi(x)a + \varphi(y)a$, donc $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Copyrighted material

En outre, il existe $x \in E$ tel que $u(x) \neq 0$, donc $\varphi(x)a \neq 0$ puis $\varphi(x) \neq 0$.

En résumé, φ est une forme linéaire non nulle sur E.

Pour préparer l'étude des puissances de u, commençons par former u^2.

Avec $u(x) = \varphi(x)a$, il vient $u^2(x) = \varphi(x)u(a) = \varphi(x)\,\varphi(a)a$, donc $u^2(x) = \varphi(a)u(x)$.

Cette égalité donne, pour tout $x \in E$, $u^2 = \varphi(a)u$. Alors $u^3 = \varphi(a)u^2 = \big(\varphi(a)\big)^2 u$.

Hypothèse de récurrence : $u^n = \big(\varphi(a)\big)^{n-1} u$. Cela implique $u^{n+1} = \big(\varphi(a)\big)^{n-1} u^2$, donc $u^{n+1} = \big(\varphi(a)\big)^n u$.

Avec $\big(\varphi(a)\big)^0 = 1$, on a $u^1 = \big(\varphi(a)\big)^0 u$. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = \big(\varphi(a)\big)^{n-1} u$.

Ex. 5

- Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors $u(x) = 0$ puis $v \circ u(x) = 0$.

Avec $v \circ u = u \circ v$, il vient $u \circ v(x) = 0$, donc $v(x) \in \operatorname{Ker} u$. Ce qui montre que $\operatorname{Ker} u$ est stable par v.

- Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$, puis $v(y) = v \circ u(x)$.

Avec $v \circ u = u \circ v$, il vient $v(y) = u \circ v(x) \in \operatorname{Im} u$. Ce qui montre que $\operatorname{Im} u$ est stable par v.

Ex. 6

Avec l'exercice précédent, il reste à montrer que, si $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u, alors u et p commutent.

Comme $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires, il suffit de montrer que les restrictions de $p \circ u$ et $u \circ p$ sont les mêmes sur $\operatorname{Im} p$ et sur $\operatorname{Ker} p$. Rappelons que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Inv} p$.

- Soit $x \in \operatorname{Ker} p$. Alors $p(x) = 0$ puis $u \circ p(x) = 0$.

Par stabilité, on a aussi $u(x) \in \operatorname{Ker} p$, donc $p \circ u(x) = 0$. Et les deux restrictions sont égales.

- Soit $x \in \operatorname{Inv} p$. Alors $p(x) = x$ puis $u \circ p(x) = u(x)$.

Par stabilité, on a aussi $u(x) \in \operatorname{Inv} p$, donc $p \circ u(x) = u(x)$. Et les deux restrictions sont égales.

Ex. 7

Soit n la dimension de E et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $p_j \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{p_j}(e_j) = 0$.

Soit q un majorant (dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des p_j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Alors on a $f^q(e_j) = 0$ pour tout j, donc f^q est l'endomorphisme nul.

Ex. 8

1) Étant donné $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on considère les endomorphismes $p = \lambda(f - ae)$ et $q = \mu(f - be)$.

L'égalité $f = bp + aq$ se lit alors $f = b\lambda(f - ae) + \mu a(f - be)$, c'est-à-dire $(b\lambda + a\mu - 1)f - ab(\lambda + \mu)e = 0$.

Pour la réaliser, il suffit de choisir (λ, μ) tel que $\begin{cases} b\lambda + a\mu - 1 = 0 \\ ab(\lambda + \mu) = 0 \end{cases}$

On choisit $\mu = -\lambda$ et la première équation donne alors $(b - a)\lambda = 1$.

En posant $K = \dfrac{1}{b - a}$, on considère alors $p = K(f - ae)$ et $q = -K(f - be)$.

On a $p^2 = K^2(f^2 - 2af + a^2 e)$ et, avec $(f - ae) \circ (f - be) = 0$, soit $f^2 = (a + b)f - abe$, il vient $p^2 = K^2(b - a)(f - ae) = K(f - ae) = p$. Ainsi p est un projecteur et de même q est un projecteur.

2) On a $p \circ q = \lambda\mu\,(f - ae) \circ (f - be) = 0$ et $p + q = K(b - a)e = e$. Les projecteurs p et q sont associés.

Notons que $p \circ q = q \circ p$, on peut donc appliquer la formule du binôme et il vient :

$$f^k = (bp + aq)^k = b^k p^k + \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i\, b^i a^{k-i} p^i \circ q^{k-i} + a^k q^k, \quad \text{d'où } f^k = b^k p + a^k q.$$

Copyrighted material

Niveau 2

Ex. 9

A contient l'application nulle. Soit $(u, v) \in A^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\forall x \in G,\ u(x) = v(x) = 0 \Rightarrow (\lambda u + v)(x) = 0$, donc $\operatorname{Ker}(\lambda u + v) \supset G$ et A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E, F)$.

Étant donné un supplémentaire H de G dans E, on considère l'application φ de A dans $\mathscr{L}(H, E)$ qui à $u \in A$ associe sa restriction u_H à H. Il est immédiat que φ est linéaire.

- Soit $v \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $v_H = 0$, et avec $v \in A$, on a aussi $v_G = 0$, donc $v = 0$ (où v_G est la restriction à G).

φ est donc injective. Pour montrer qu'elle est surjective, considérons $w \in \mathscr{L}(H, F)$.

- Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ la projection sur H parallèlement à G et $u = w \circ p$.

Avec $\operatorname{Ker} p = G$, on a $\operatorname{Ker} u \supset G$, donc $u \in A$. Avec $H = \operatorname{Inv} p$, il vient $u_H = w$. Ainsi, φ est surjective.

A et $\mathscr{L}(H, F)$ sont donc isomorphes et il s'ensuit $\dim A = \dim H \dim F = (\dim E - \dim G)\dim F$.

Ex. 10

Il est immédiat que $\operatorname{Inv} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$, donc $\dim(\operatorname{Ker} f) \leqslant 2$ puisque, par hypothèse, $\dim(\operatorname{Inv} f) = 1$.

De $f^2 = f^3$ on déduit $f^3 = f^4$, donc $f^2 = f^4$: f^2 est un projecteur et on a $E = \operatorname{Inv} f^2 \oplus \operatorname{Ker} f^2$.

Montons que $f + \mathrm{Id}_E$ est injective : si $x \in E$ est tel que $f(x) = -x$, alors $f^2(x) = x$ et $f^3(x) = -x$.

Puis de $f^2 = f^3$, on déduit $x = 0$.

Avec $f^2 - \mathrm{Id}_E = (f + \mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E)$ et $f + \mathrm{Id}_E$ bijective, il vient $\operatorname{Ker}(f^2 - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, donc $\dim \operatorname{Ker}(f^2 - \mathrm{Id}_E) = 1$.

Comme f^2 est un projecteur, on en déduit $\dim \operatorname{Ker} f^2 = 2$ et $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

- Si $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$, $\operatorname{Inv} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires, donc f est un projecteur et il existe une base dans laquelle la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$, avec $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ et $\dim(\operatorname{Ker} f^2) = 2$, il existe $e_3 \in \operatorname{Ker} f^2 \setminus \operatorname{Ker} f$.

Alors $f(e_3) = e_2$ est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$ et (e_2, e_3) est une base de $\operatorname{Ker} f^2$. Si e_1 est une base de $\operatorname{Inv} f$, puisque $E = \operatorname{Inv} f \oplus \operatorname{Ker} f^2$, (e_1, e_2, e_3) est une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex. 11

Soit A une sous-algèbre de dimension finie de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et f un élément de A.

- Supposons f non constante, il existe alors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, tel que $f(a) \neq f(b)$. L'application f étant continue on a, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\big[f(a), f(b)\big] \subset f\big([a, b]\big)$ donc $f(\mathbb{R}) \supset \big[f(a), f(b)\big]$

et ce segment n'étant pas réduit à un point, f prend une infinité de valeurs distinctes.

- A étant de dimension finie, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\big(1, f, f^2, \ldots, f^p\big)$ soit lié.

Il existe donc $\big(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\big) \in \mathbb{R}^{p+1} \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p} \lambda_i f^i = 0$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{p} \lambda_i \big(f(x)\big)^i = 0$ d'où pour tout $y \in f(\mathbb{R})$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{p} \lambda_i y^i = 0$

Ainsi le polynôme $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \lambda_i X^i$ a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul, ce qui est contradictoire avec $\big(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\big) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

En conséquence, f est constante. $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ contient une seule sous-algèbre de dimension finie, c'est la sous-algèbre des fonctions constantes.

Copyrighted material

Ex. 12

1) On vérifie sans difficulté que $(AB)^2 = AB$.

- Notons $e = (e_1\,,\,e_2)$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1\,,\,\varepsilon_2\,,\,\varepsilon_3)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telles que $A = \mathrm{mat}_{e,\varepsilon}(f)$ et $B = \mathrm{mat}_{\varepsilon,e}(g)$ alors AB est la matrice sur la base ε de $h = f \circ g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

- L'endomorphisme h est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ et il est visible que les deux premières colonnes de AB sont indépendantes donc $\mathrm{rg}\,h = 2$ avec :

$$\mathrm{Im}\,h = \mathrm{Vect}\left(h(\varepsilon_1), h(\varepsilon_2)\right) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_3 - \varepsilon_2, \varepsilon_3 - \varepsilon_1)$$

Remarque
$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,h &= \mathrm{Vect}\left(h(\varepsilon_1), h(\varepsilon_2)\right) = \mathrm{Vect}\left(h(\varepsilon_2), h(\varepsilon_3)\right) = \mathrm{Vect}\left(h(\varepsilon_1), h(\varepsilon_3)\right) \\ \mathrm{Ker}\,h &= \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \end{aligned}$$

- De $f \circ g = h$ on déduit $\mathrm{Im}\,h = f(\mathrm{Im}\,g)$ et donc d'après le théorème du rang appliqué à la restriction $f_{|\mathrm{Im}\,g} \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}\,g, \mathbb{R}^3)$:

$$\dim \mathrm{Im}\,h \leqslant \dim \mathrm{Im}\,g \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{rg}\,g \geqslant 2$$

Or $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ donne $\mathrm{rg}\,g \leqslant 2$ d'où finalement $\mathrm{rg}\,g = 2$.

- Avec $h = f \circ g$, on a $\mathrm{Im}\,h \subset \mathrm{Im}\,f$ donc $\mathrm{rg}\,f \geqslant \mathrm{rg}\,h$ c'est-à-dire $\mathrm{rg}\,f \geqslant 2$.

Or $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ donne $\mathrm{rg}\,f \leqslant 2$ d'où finalement $\mathrm{rg}\,f = 2$.

2) L'image par toute application linéaire d'un système lié est un système lié.

Donc $(h(\varepsilon_1), h(\varepsilon_2)) = \left(f\left(g(\varepsilon_1)\right), f\left(g(\varepsilon_2)\right)\right)$ étant libre, a fortiori $(g(\varepsilon_1), g(\varepsilon_2))$ est libre et constitue une base de $\mathbb{R}^2$. Puisque $h = f \circ g$ est un projecteur, on a alors :

$$f \circ g \circ f \circ g(\varepsilon_i) = f \circ g(\varepsilon_i) \text{ pour } i = 1 \text{ ou } 2$$

Or $\mathrm{rg}\,f = 2$ avec $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ donne, d'après le théorème du rang, que f est injective. On déduit donc des relations précédentes que $g \circ f\,(g(\varepsilon_i)) = g(\varepsilon_i)$, $i = 1$ ou 2 et puisque $(g(\varepsilon_1), g(\varepsilon_2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, il vient $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ donc $BA = I_2$.

Remarque On peut faire le même raisonnement avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ ou avec $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Ex. 13

1) On a $\mathrm{Im}\,f^2 = f\big(f(E)\big) = f(\mathrm{Im}\,f)$.

D'autre part, $\mathrm{Im}\,f$ est stable par f donc $f_{|\mathrm{Im}\,f}$ induit un endomorphisme φ de $\mathrm{Im}\,f$ tel que $\mathrm{Im}\,f^2 = \mathrm{Im}\,\varphi$ ce qui donne $\mathrm{rg}\,f^2 = \mathrm{rg}\,\varphi$.

D'après le théorème du rang appliqué à $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}\,f)$: $\mathrm{rg}\,\varphi = \dim \mathrm{Im}\,f - \dim \mathrm{Ker}\,\varphi$

avec $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{x \in \mathrm{Im}\,f \,/\, f(x) = 0\} = \mathrm{Im}\,f \cap \mathrm{Ker}\,f$, il vient :

$$\mathrm{rg}\,f^2 = \mathrm{rg}\,f - \dim(\mathrm{Ker}\,f \cap \mathrm{Im}\,f) \quad \textbf{(1)}$$

2) Toujours avec le théorème du rang :
$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Ker}\,f^2 &= n - \mathrm{rg}\,f^2 \\ \dim \mathrm{Ker}\,f &= n - \mathrm{rg}\,f \end{aligned}$$

Donc l'égalité **(1)** donne $\dim \mathrm{Ker}\,f^2 = \dim \mathrm{Ker}\,f + \dim(\mathrm{Ker}\,f \cap \mathrm{Im}\,f)$.

Or $\mathrm{Ker}\,f \cap \mathrm{Im}\,f \subset \mathrm{Ker}\,f$, donc $\dim(\mathrm{Ker}\,f \cap \mathrm{Im}\,f) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\,f$ et finalement :

$$\dim \mathrm{Ker}\,f^2 \leqslant 2 \dim \mathrm{Ker}\,f \quad \textbf{(2)}$$

Ex. 14

La famille $\Phi = \left(\varphi_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant m_i}}$ est libre (corollaire du théorème 30) si et seulement si $\bigcap_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant m_i}} \mathrm{Ker}\,\varphi_{i,j} = \{0_E\}$.

Soit un polynôme P de E appartenant à cette intersection ; on a : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\forall k \in [\![0, m_i - 1]\!]$, $P^{(k)}(a_i) = 0$ donc a_i est racine d'ordre m_i de P, c'est-à-dire que P est divisible par $(X - a_i)^{m_i}$.

Les a_i étant distincts, P est divisible par $Q = \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{m_i}$. Or on a $\deg Q = \sum_{i=1}^{p} m_i = n + 1$ et $\deg P \leqslant n$.

On en déduit $P = 0$. La famille Φ est donc libre et, puisque $\mathrm{Card}\,\Phi = n + 1 = \dim E$, c'est une base de E.

Copyrighted material

Ex. 15

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], f(P) = P(X+1) - P(X)$.

Premier calcul de f^n.

$P(X)$ et $P(X+1)$ ont le même degré et le même coefficient dominant. On a donc $\deg f(P) \leqslant \deg P - 1$.

Par récurrence, il vient $\deg f^k(P) \leqslant \deg P - k$, puis $\deg f^{n-1}(P) \leqslant 0$.

Alors $f^{n-1}(P)$ est constant, puis $f^n(P) = 0$.

Second calcul de f^n. On a $f(P) = P(x+1) - P(x)$ puis $f^2(P) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$.

Par récurrence, on obtient $f^r(P) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \mathrm{C}_r^k P(X+k)$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

Or on a $f^n(P) = 0$. Il s'ensuit $(-1)^n P(X) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+1-k} \mathrm{C}_n^k P(X+k)$, soit $P(X) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \mathrm{C}_n^k P(X+k)$.

Ex. 16

1) $f = -\frac{1}{a^2}(f - 2a\,\mathrm{Id}_E) \circ f^2$ montre que $\mathrm{Ker}\, f^2$ est inclus dans $\mathrm{Ker}\, f$.

L'inclusion $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2$ est usuelle. On a donc $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.

Soit $y \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$. Il existe $x \in E$, $y = f(x)$. Alors $f(y) = f^2(x)$ donc $f^2(x) = 0$ puisque $y \in \mathrm{Ker}\, f$.

Étant dans le noyau de f^2, x est aussi dans le noyau de f, d'où $y = f(x) = 0$ et $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

Le théorème du rang $\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) = \dim E$ permet alors de conclure : $\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f = E$.

2) Le cas où $\mathrm{rg}\, f = 0$ est banal. Dans les autres cas, f induit un automorphisme $\overline{f}$ de $\mathrm{Im}\, f$.

$f^3 - 2af^2 + a^2 f = 0$ se lit aussi $f \circ (f - a\,\mathrm{Id}_E)^2 = 0$, donc $\overline{f} \circ (\overline{f} - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\, f})^2 = 0$ puis $(\overline{f} - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\, f})^2 = 0$.

- Dans le cas où $\mathrm{rg}\, f = 1$, alors $\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$. Endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension 1, $\overline{f} - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\, f}$ est nul. Une matrice de f est alors $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Dans le cas où $\mathrm{rg}\, f = 2$, alors $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$. Endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension 2, on a

ou bien $\overline{f} - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\, f} = 0$ et une matrice de f est évidemment $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ou bien $\overline{f} - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\, f} \neq 0$ et $(\overline{f} - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\, f})^2 = 0$. Il existe alors une base (e_1, e_2) de $\mathrm{Im}\, f$ telle que

$e_2 = (\overline{f} - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\, f})(e_1)$. Alors $f(e_1) = ae_1 + e_2$ et $\overline{f}^2 = 2a\overline{f} - a^2\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\, f}$ donne $f(e_2) = ae_2$.

Une matrice de f est donc $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Dans le cas où $\mathrm{rg}\, f = 3$, alors f est bijective telle que $(f - a\,\mathrm{Id}_E)^2 = 0$.

Si $f = a\,\mathrm{Id}_E$, la matrice est scalaire. Pour $f \neq a\,\mathrm{Id}_E$, on a $\mathrm{rg}(f - a\,\mathrm{Id}_E) = 1$.

Soit (e_1, e_2) une base de $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{Id}_E)$ et $e_3 \notin \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{Id}_E)$. Posons $f(e_3) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

Avec $f^2(e_3) = a\,\alpha\, e_1 + a\,\beta\, e_2 + \gamma f(e_3)$ et $f^2(e_3) = 2af(e_3) - a^2 e_3$, il vient $\gamma = a$ et une matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \alpha \\ 0 & a & \beta \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Copyrighted material

Niveau 3

Ex. 17

$\dim E = n+1$ et $\text{Card}\{Q_k \,/\, 0 \leqslant k \leqslant n\} = n+1$, il suffit donc de montrer que la famille $(Q_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

La formule de Taylor donne pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\quad Q_k(X) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_k^j}{j!} P^{(j)}(X) \quad$ **(1)**

Considérons $n+1$ réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q_k(X) = 0 \quad$ **(2)**

avec **(1)**, il vient $\quad \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \lambda_k \frac{a_k^j}{j!} P^{(j)}(X) = 0 \quad$ soit $\quad \sum_{j=0}^{n} \frac{P^{(j)}(X)}{j!} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k^j = 0 \quad$ **(3)**

La famille $\left(\frac{1}{j!}P^{(j)}(X)\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est de degrés échelonnés : $\deg P^{(j)}(X) = n-j$ et elle comporte $n+1$ éléments.

C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et la relation **(3)** donne : $\quad \forall j \in [\![0, n]\!], \ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k^j = 0 \quad$ **(4)**

Matriciellement les relations **(4)** s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots\cdots & 1 \\ a_0 & \cdots\cdots & a_n \\ a_0^2 & \cdots\cdots & a_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^n & \cdots\cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A = \left[a_j^i\right]_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant n}}$ est la matrice de Vandermonde des $n+1$ nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Ceux-ci étant deux à deux distincts, A est inversible et **(4)** donne $\quad \lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$

On a donc prouvé que $(Q_k)_{0\leqslant n}$ est une famille libre.

Ex. 18

Montrons par récurrence que $\quad \text{rg}(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_k) \leqslant n-k.$

- La propriété est vraie pour $k=1$, en effet f_1 étant nilpotent, on a $\quad \text{rg}\, f_1 \leqslant n-1.$
- Supposons $\text{rg}\left(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_{k-1}\right) \leqslant n-k+1$ avec $\quad k \leqslant n.$

Posons $\quad F_{k-1} = f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_{k-1}$. Les f_i étant deux à deux permutables, on a $\quad f_k \circ F_{k-1} = F_{k-1} \circ f_k$.

Il en résulte que $\text{Im}\, F_{k-1}$ est stable par f_k ; en effet, pour $y = F_{k-1}(x)$, élément de $\text{Im}\, F_{k-1}$, on a :

$$f_k(y) = f_k\left(F_{k-1}(x)\right) = F_{k-1}\left(f_k(x)\right) \quad \text{donc} \quad f_k(y) \in \text{Im}\, F_{k-1}$$

L'endomorphisme f_k de E induit donc un endomorphisme g_k de $\text{Im}\, F_{k-1}$:

$$\forall x \in \text{Im}\, F_{k-1}, g_k(x) = f_k(x)$$

et puisque f_k est nilpotent, il en est de même pour g_k car $g_k^n(x) = f_k^n(x) = 0.$

Puisque g_k est un endomorphisme nilpotent de $\text{Im}\, F_{k-1}$, on a $\quad \text{rg}\, g_k \leqslant \dim \text{Im}\, F_{k-1} - 1.$

Or $\quad \text{rg}\, g_k = \dim f_k\left(\text{Im}\, F_{k-1}\right) = \dim \text{Im}\,(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_k) = \text{rg}\,(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_k)$ donc :

$$\text{rg}\,(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_k) \leqslant n-k$$

On a ainsi prouvé que la propriété est récurrente.

- En conséquence, on a $\quad \text{rg}\,(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n) \leqslant 0 \quad$ donc :

$$\text{rg}\,(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n = 0$$

Copyrighted material

Ex. 19

1) Il s'agit de montrer que, pour tout $x \in E$, il existe un unique triplet $(x_1, x_2, x_3) \in E_1 \times E_2 \times E_3$ tel que $x = x_1 + x_2 + x_3$.

Supposons qu'un tel triplet existe, alors on a nécessairement :

$$\begin{cases} x &= x_1 + x_2 + x_3 & \textbf{(1)} \\ f(x) &= -x_2 + 2x_3 & \textbf{(2)} \\ f^2(x) &= x_2 + 4x_3 & \textbf{(3)} \end{cases}$$

Par combinaison linéaire de **(2)** et **(3)**, il vient :

$$x_3 = \frac{1}{6}\left(f^2(x) + f(x)\right) \qquad \textbf{(2)} + \textbf{(3)}$$

$$x_2 = \frac{1}{3}\left(f^2(x) - 2f(x)\right) \qquad -2\times\textbf{(2)} + \textbf{(3)}$$

puis **(1)** donne : $$x_1 = -\frac{1}{2}\left(f^2(x) - f(x) - 2x\right)$$

Ce calcul montre qu'il y a au plus un triplet (x_1, x_2, x_3) solution du problème.

Pour prouver qu'il y en a un et un seul, il suffit donc de vérifier que le triplet que l'on vient de calculer est effectivement solution.

Par construction, x_1, x_2, x_3 vérifie l'équation **(1)** : $x_1 + x_2 + x_3 = x$.

Il reste donc à montrer que $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ et $x_3 \in E_3$.

En utilisant $f^3 = f^2 + 2f$, le calcul donne :

$$f(x_1) = -\frac{1}{2}\left(f^3(x) - f^2(x) - 2f(x)\right) = 0 \qquad \text{donc } x_1 \in E_1$$

$$f(x_2) = \frac{1}{3}\left(f^3(x) - 2f^2(x)\right) = -\frac{1}{3}\left(f^2(x) - 2f(x)\right) = -x_2 \qquad \text{donc } x_2 \in E_2$$

$$f(x_3) = \frac{1}{6}\left(f^3(x) + f^2(x)\right) = \frac{1}{3}\left(f^2(x) + f(x)\right) = 2x_3 \qquad \text{donc } x_3 \in E_3$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, il existe $(x_1, x_2, x_3) \in E_1 \times E_2 \times E_3$ unique tel que :

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{donc} \quad E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$$

2) Avec la décomposition précédente : $x = x_1 + x_2 + x_3$, il vient $f(x) = -x_2 + 2x_3$

or $x_2 = p_2(x)$ et $x_3 = p_3(x)$ donc $f = -p_2 + 2p_3$.

Sachant que $p_2 \circ p_3 = p_3 \circ p_2 = 0$, la formule du binôme s'applique et donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k 2^{n-k} p_2^k \circ p_3^{n-k}$$

ce qui se réduit à $f^n = (-1)^n p_2 + 2^n p_3$

Remarquons de plus que pour $n = 0$, $f^0 = \mathrm{Id}_E = p_1 + p_2 + p_3$.

3) Les formules précédentes pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ donnent :

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = \mathrm{Id}_E \\ -p_2 + 2p_3 = f \\ p_2 + 4p_3 = f^2 \end{cases}$$

(noter que c'est, au changement de notation près, le système du 1)).

On en déduit : $$p_1 = -\frac{1}{2}\left(f^2 - f - 2\,\mathrm{Id}_E\right) \quad , \quad p_2 = \frac{1}{3}\left(f^2 - 2f\right) \quad , \quad p_3 = \frac{1}{6}\left(f^2 + f\right)$$

d'où $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ f^n = \left(\frac{2^n}{6} - \frac{2(-1)^n}{3}\right) f + \left(\frac{2^n}{6} + \frac{(-1)^n}{3}\right) f^2.$$

Ex. 20

1) On vérifie aisément que :

- $\mathscr{C}(f)$ contient Id_E,
- $\mathscr{C}(f)$ est stable par combinaison linéaire,
- $\mathscr{C}(f)$ est stable pour la loi $\circ$.

2) Il est clair que φ_a est linéaire : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \ \forall (g, h) \in \mathscr{C}(f)^2, \quad \varphi_a(\lambda g + \mu h) = \lambda\, \varphi_a(g) + \mu\, \varphi_a(b)$

Copyrighted material

- Puisque $f^{n-1}(a) \neq 0$, le système $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ tel que :

$$e_1 = a \ , \ e_2 = f(a) \ , \ \cdots \ , \ e_k = f^{k-1}(a) \ \cdots \ e_n = f^{n-1}(a)$$

est une base de E (propriété 26).

Il en résulte que la famille $\left(f^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est libre dans $\mathscr{C}(f)$.

En effet $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k = 0$, avec $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, donne en particulier $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(a) = 0$

d'où $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. On a donc $\dim \mathscr{C}(f) \geqslant n$.

- Montrons maintenant que φ_a est injective.

Pour $g \in \operatorname{Ker} \varphi_a$, on a $g(a) = 0$, or g est permutable avec f, donc aussi avec toute puissance de f et il vient pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\quad g\left(f^k(a)\right) = f^k\left(g(a)\right) = 0$.

Ainsi $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $g(e_k) = 0$ d'où $g = 0$. On a prouvé que $\operatorname{Ker} \varphi_a = \{0\}$: φ_a est injective.

- L'injectivité de φ_a donne $\dim \operatorname{Im} \varphi_a = \dim \mathscr{C}(f) \geqslant n$.

Or $\operatorname{Im} \varphi_a \subset E$ avec $\dim E = n$, donc $\operatorname{Im} \varphi_a = E$.

Ainsi φ_a est surjective et finalement c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{C}(f)$ sur E.

3) D'après le 2), $\left(\mathrm{Id}_E, f, \cdots, f^{n-1}\right)$ est une base de $\mathscr{C}(f)$.

Ex. 21

1) f est nilpotent et non nul donc $1 \leqslant \operatorname{rg} f \leqslant 3$.

- Supposons $\operatorname{rg} f = 3$ alors d'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

Avec $\operatorname{Im} f^2 = f\left(f(E)\right) = \operatorname{Im}\left(f_{|\operatorname{Im} f}\right)$ on obtient : $\operatorname{rg} f^2 = \operatorname{rg} f - \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f)$ puis

$$0 \leqslant \operatorname{rg} f - \operatorname{rg} f^2 \leqslant \dim \operatorname{Ker} f \qquad \textbf{(1)}$$

De même $\operatorname{Im} f^3 = f\left(f^2(E)\right) = \operatorname{Im}\left(f_{|\operatorname{Im} f^2}\right)$ donne (théorème du rang) : $\operatorname{rg} f^3 = \operatorname{rg} f^2 - \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f^2)$ d'où :

$$0 \leqslant \operatorname{rg} f^2 - \operatorname{rg} f^3 \leqslant \dim \operatorname{Ker} f \qquad \textbf{(2)}$$

De **(1)** et **(2)** on déduit $0 \leqslant \operatorname{rg} f - \operatorname{rg} f^3 \leqslant 2 \dim \operatorname{Ker} f$ donc $\operatorname{rg} f^3 \geqslant 1$ ce qui est contradictoire avec $f^3 = 0$.

- Supposons maintenant $\operatorname{rg} f = 1$ alors $\dim \operatorname{Ker} f = 3$ et deux cas sont possibles :

$$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\} \quad \text{ou} \quad \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$$

– Pour $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, $f_{|\operatorname{Im} f}$ induit un isomorphisme de $\operatorname{Im} f$ sur $\operatorname{Im} f^2$ donc $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$ puis de même $\operatorname{rg} f^2 = \operatorname{rg} f^3$.

Ainsi $\operatorname{rg} f^3 = 1$ ce qui est contradictoire avec $f^3 = 0$.

– Pour $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ on a $f^2 = 0$ ce qui est encore une contradiction.

- En conclusion, s'il existe de tels endomorphismes on a nécessairement $\operatorname{rg} f = 2$.

On peut remarquer que la matrice A de la question suivante vérifie :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = 0$$

Il existe donc bien des endomorphismes $f \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

2) **Analyse**

S'il existe une base $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ telle que $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

celle-ci vérifie les conditions :

$$\begin{cases} e_2 = f(e_1) \quad , \quad e_3 = f(e_2) = f^2(e_1) \\ (e_2, e_3) \ \text{ est une base de } \ \operatorname{Im} f \\ (e_3, e_4) \ \text{ est une base de } \ \operatorname{Ker} f \\ \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \mathbb{K} e_3 \end{cases}$$

Copyrighted material

Synthèse

f^2 est non nul donc il existe $e_1 \in E$ tel que $f^2(e_1) \neq 0$.

On pose $e_2 = f(e_1)$ et $e_3 = f^2(e_1)$.

$f^3 = 0$ donne $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$ donc $e_3 \in \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} f$ étant de dimension 2, on peut trouver e_4 tel que (e_3, e_4) soit une base de $\operatorname{Ker} f$.

Montrons alors que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{K}^4$ tel que $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i = 0$.

Appliquons f^2 à cette égalité, il vient : $\alpha_1 e_3 = 0$ donc $\alpha_1 = 0$

puis appliquons f, il vient $\alpha_2 e_3 = 0$ donc $\alpha_2 = 0$.

Il reste $\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 = 0$ ce qui donne $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ car (e_3, e_4) est libre.

Par construction de la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$, on a $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex. 22

1) On a $e^{inx} = \left(e^{ix}\right)^n$ donc $\cos nx = \operatorname{Re}(\cos x + i \sin x)^n$.

La formule du binôme donne $(\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k i^k \sin^k x \cos^{n-k} x$ d'où :

$$\cos nx = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^k \mathrm{C}_n^{2k} \left(1 - \cos^2 x\right)^k \cos^{n-2k} x$$

et il suffit de poser $T_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^k \mathrm{C}_n^{2k} \left(1 - X^2\right)^k X^{n-2k}$ pour avoir :

$$\cos nx = T_n(\cos x)$$

Chaque produit $\left(1 - X^2\right)^k X^{n-2k}$ étant de degré n, on a d'abord $\deg T_n \leqslant n$.

Le coefficient de X^n dans T_n est $a_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \mathrm{C}_n^{2k}$

il est visiblement non nul donc $\deg T_n = n$.

Remarque.

Le calcul de a_n est classique : on pose $b_n = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \mathrm{C}_n^{2k+1}$ et la formule du binôme donne :

$$(1+1)^n = a_n + b_n \ , \ (1-1)^n = a_n - b_n \quad \text{d'où} \quad a_n = b_n = 2^{n-1}$$

La famille $(T_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ étant de degrés échelonnés, c'est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

2) La fonction P est continue donc bornée sur $[-1, 1]$, donc $f : x \mapsto \dfrac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1, 1[$ et il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in]-1, 1[, \quad |f(x)| \leqslant \dfrac{M}{\sqrt{1-x^2}}$.

Au voisinage de 1, on a $\dfrac{M}{\sqrt{1-x^2}} \sim \dfrac{M}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$ et on sait que $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est intégrable sur $[0, 1[$. Il en résulte que $x \mapsto \dfrac{M}{\sqrt{1-x^2}}$ puis que f est intégrable sur $[0, 1]$.

De même, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ est intégrable sur $]-1, 0]$ donc $x \mapsto \dfrac{M}{\sqrt{1-x^2}}$ et f le sont aussi.

Copyrighted material

On remarque maintenant que :

$$\varphi\ :\ P\mapsto\int_{-1}^{1}\frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\quad\text{et}\quad\psi\ :\ P\mapsto\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}P\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, donc puisque $\left(T_p\right)_{0\leqslant p\leqslant 2n-1}$ est une base de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, pour prouver l'identité annoncée, c'est-à-dire $\varphi=\psi$, il suffit de vérifier :

$$\forall p\in[\![0,2n-1]\!].\quad\varphi\left(T_p\right)=\psi\left(T_p\right)$$

Avec le changement de variable défini par $x=\cos t$, $t\in]0,\pi[$, on obtient :

$$\varphi\left(T_p\right)=\int_{-1}^{1}\frac{T_p(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}T_p(\cos t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\cos pt\,\mathrm{d}t$$

donc $\varphi(T_0)=\pi$ et pour $p\in[\![1,2n-1]\!]$. $\varphi\left(T_p\right)=0$.

Évaluons $\psi\left(T_p\right)$:

$$\frac{n}{\pi}\psi\left(T_p\right)=\sum_{k=1}^{n}\cos\left(p\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

$$\begin{aligned}\text{donc}\quad\frac{2n}{\pi}\sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)\psi\left(T_p\right)&=\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{p\pi}{2n}\cos\left(p\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\sin\left(p\frac{k\pi}{n}\right)-\sin\left(p\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\\&=\sin k\pi\\&=0\end{aligned}$$

Pour $p\in[\![1,2n-1]\!]$, on a $\sin\dfrac{p\pi}{2n}\neq 0$ donc $\psi\left(T_p\right)=0$.

Pour $p=0$, on obtient directement $\dfrac{n}{\pi}\psi(T_0)=n$ donc $\psi(T_0)=\pi$.

L'identité $\varphi=\psi$ est donc prouvée.

Ex. 23

1) $f^2=0$ équivaut à $\operatorname{Im}f\subset\operatorname{Ker}f$, d'où $\operatorname{rg}f\leqslant 3-\operatorname{rg}f$, puis $f=0$ ou $\operatorname{rg}f=1$.

Si $\operatorname{rg}f=1$, soit u une base de $\operatorname{Im}f$. Pour tout $x\in\mathbb{R}^3$, on a $f(u)=\varphi(x)u$, avec $\varphi(x)\in\mathbb{R}$.

La linéarité de $\varphi\ :\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ est aisée.

2) Avec $\operatorname{rg}f=1$, il existe $u\in E$ et $\varphi\in E^*$ tels que $\forall x\in E,\ f(x)=\varphi(x)u$.

$f^2(x)=f\left(\varphi(x)u\right)=\varphi(x)f(u)=\varphi(x)\,\varphi(u)u=\varphi(u)f(x)$ donc $f^2=\varphi(u)f$.

Par récurrence, on obtient $f^n=\left(\varphi(u)\right)^{n-1}f$.

Ex. 24

$E_k(a)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^k\left([a_0,a_n],\mathbb{R}\right)$.

Quand $n=1$, la dimension de $E_k(a)$ est 4 (celle de $\mathbb{R}_3[X]$). Dans la suite on se limite à $n\geqslant 2$.

Posons $a'=(a_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ et on considère l'application linéaire $\Phi_k\ :\ E_k(a)\to E_k(a')$ qui à $f\in E_k(a)$ associe sa restriction à $[a_0,a_{n-1}]$. Il est clair que Φ_k est surjective.

Une fonction polynomiale g de degré au plus 3 est caractérisée par les valeurs en a_{n-1} de $g^{(j)}$ pour $0\leqslant j\leqslant 3$.

$\operatorname{Ker}\Phi_k$ s'identifie à $\left\{P\in\mathbb{R}_3[X].\ \ P^{(j)}(a_{n-1})=0,\ 0\leqslant j\leqslant k\right\}$, c'est-à-dire au sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes qui ont a_{n-1} pour racine d'ordre au moins $k+1$.

$\operatorname{Ker}\Phi_3=\{0\}$ et, pour $k<3$, une base de $\operatorname{Ker}\Phi_k$ est $\left((X-a_{n-1})^{k+1},\dots,(X-a_{n-1})^3\right)$.

Donc $\dim\operatorname{Ker}\Phi_k=3-k$.

Si $E_k(a')$ est de dimension finie $d_{n-1}^{(k)}$, alors $E_k(a)$ est de dimension finie $d_n^{(k)}=d_{n-1}^{(k)}+3-k$ (théorème du rang).

Avec $d_1^{(k)}=4$, il vient $d_n^{(k)}=(3-k)n+k+1$.

Copyrighted material

Ex. 25

1) $q\circ u=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u^k\circ p\circ u^{n+1-k}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u^{k+1}\circ p\circ u^{n-k}=u\circ\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u^k\circ p\circ u^{n-k}\right)$.

Avec $u^0\circ p\circ u^{n-0}=p\circ u^n=p=u^n\circ p\circ u^{n-0}$, $q\circ u=u\circ\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u^k\circ p\circ u^{n-k}\right)=u\circ q$.

$\operatorname{Im}(p\circ u^{n-k})\subset\operatorname{Im}p=V$ puis par stabilité $\operatorname{Im}(u^k\circ p\circ u^{n-k})\subset V$, donc $\operatorname{Im}q\subset V$. Il s'ensuit $p\circ q=q$.

$q\circ q=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u^k\circ p\circ u^{n-k}\circ q=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u^k\circ p\circ q\circ u^{n-k}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u^k\circ q\circ u^{n-k}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u^k\circ u^{n-k}\circ q=q$.

2) Pour $y\in V$, on a $u^{n-k}(y)\in V$ donc $p\circ u^{n-k}(y)=u^{n-k}(y)$ donc $u^k\circ p\circ u^{n-k}(y)=u^n(y)=y$ puis $q(y)=y$.

Il s'ensuit $\forall x\in E,\ q\big(p(x)\big)=p(x)$ puis $q\circ p=p$.

3) $(\mathrm{Id}_E-p)\circ q=0$ donne $\operatorname{Inv}q=\operatorname{Im}q\subset\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E-p)=\operatorname{Inv}p=V$.

De même, $q\circ p=p$ donne $V\subset\operatorname{Inv}q$.

$\operatorname{Ker}q$ est alors un supplémentaire de V.

Enfin, $u\circ q=q\circ u$ assure que $\operatorname{Ker}q$ est stable par u.

Ex. 26

1) Si r est racine commune à P et Q, alors $P=(X-r)P_1$ et $Q=(X-r)Q_1$ donne $-Q_1P+P_1Q=0$.

Avec $UP=-VQ$, P divise VQ. Si P et Q n'ont pas de racine commune, alors $P\wedge Q=1$ puis P divise V.

La condition $\deg V\leqslant n-1$ implique alors $V=0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2) La base canonique $\mathfrak{B}$ de $(\mathbb{C}_2[X])^2$ est formée de $e_1=(1,0)$, $e_2=(X,0)$, $e_3=(0,1)$, $e_4=(0,X)$.

On a $\varphi(e_1)=A$, $\varphi(e_2)=XA$, $\varphi(e_3)=B$ et $\varphi(e_4)=XB$. Avec $A=aX^2+bX+c$ et $B=dX^2+eX+f$ et $\mathfrak{B}'$ base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$, la matrice de φ est $\begin{pmatrix}c&0&f&0\\b&c&e&f\\a&b&d&e\\0&a&0&d\end{pmatrix}$.

3) A et B ont une racine commune si et seulement si le noyau de φ n'est pas nul, c'est-à-dire $\begin{vmatrix}c&0&f&0\\b&c&e&f\\a&b&d&e\\0&a&0&d\end{vmatrix}=0$.

Cette condition s'exprime par $\begin{vmatrix}a&c\\d&f\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix}a&b\\d&e\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}b&c\\e&f\end{vmatrix}$.

Copyrighted material

CHAPITRE 2

Calcul matriciel Systèmes linéaires

A. Formulaire de calcul matriciel 62
1. Notations – Définitions 62
2. Opérations – Structures 63

B. Matrices semblables. – Matrices équivalentes – Rang 65
1. Changement de base 65
2. Matrices semblables 66
3. Matrices équivalentes – Rang 67

C. Opérations élémentaires 68
1. Méthodes 68
2. Calcul du rang 69
3. Calcul de l'inverse éventuelle d'une matrice carrée 71

D. Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme 72
1. Trace d'une matrice carrée 72
2. Trace d'un endomorphisme 73

E. Systèmes d'équations linéaires 74
1. Notion d'équation linéaire 74
2. Système d'équations linéaires 75
3. Application au calcul de l'inverse d'une matrice 75
4. Système linéaire : cas général 76

Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre 79

Énoncés des exercices 84

Solutions des exercices 87

Copyrighted material

A. Formulaire de calcul matriciel

1. Notations – Définitions

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou le corps des complexes.

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des **matrices à n lignes, p colonnes** à termes dans $\mathbb{K}$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$

on note aussi $A = \left[a_{ij}\right]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ ou plus simplement $A = \left[a_{ij}\right]$

a_{ij} est le terme situé en $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne, c'est le terme général de A.

- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des **matrices colonnes** à n lignes et à termes dans $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des **matrices lignes** à p colonnes et à termes dans $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des **matrices carrées** à n lignes, n colonnes et à termes dans $\mathbb{K}$. ✎ (1)

✎ (1) $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une notation simplifiée pour $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

- Étant donné $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = \left[a_{ij}\right]$

  le $i^{\text{ème}}$ **vecteur-ligne** de A est : $\left(a_{i1}\,,\, a_{i2}\,,\, \dots\,,\, a_{ip}\right) \in \mathbb{K}^p$

  le $j^{\text{ème}}$ **vecteur-colonne** de A est : $\left(a_{1j}\,,\, a_{2j}\,,\, \dots\,,\, a_{nj}\right) \in \mathbb{K}^n$

1.1 – Matrice d'un système de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $X = (x_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ un système de vecteurs de E : $x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i$.

La matrice du système X sur la base $\mathcal{B}$ est : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(X) = \left[x_{ij}\right] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1.2 – Matrice d'une application linéaire sur un couple de bases

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives non nulles p et n,
$\mathcal{U} = (u_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ une base de E, $\mathcal{V} = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de F.

Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ la **matrice de f sur le couple de bases** $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ est la matrice sur $\mathcal{V}$ du système $\left(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p)\right)$. On la note $\mathrm{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{V}}\left(f(u_1), \dots, f(u_p)\right)$$

Si $f(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_j$ alors $\mathrm{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) = \left[a_{ij}\right] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Noter que :

- la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des coordonnées de $f(u_j)$ sur la base $\mathcal{V}$,
- le nombre de lignes est la dimension de l'espace d'arrivée,
- le nombre de colonnes est la dimension de l'espace de départ,
- si $\mathcal{V}^* = \left(v_i^*\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la famille des formes coordonnées relatives à la base $\mathcal{V}$,

$$a_{ij} = v_i^*\left(f(u_j)\right)$$

1.3 – Matrice d'un endomorphisme sur une base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathcal{U} = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E.

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, la **matrice de f sur la base** $\mathcal{U}$ est :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{U}}(f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(f)$$

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{U}}(f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{U}}\left(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)\right)$$

Noter que cela correspond au cas précédent avec $E = F$, $\mathcal{U} = \mathcal{V}$
et $\mathrm{mat}_{\mathcal{U}}(f)$ est une notation simplifiée pour $\mathrm{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(f)$.

Copyrighted material

2. Opérations – Structures

2.1 – Addition – Produit par un scalaire

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$ sont éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions p et n, de bases respectives $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(E,F)$.

- $C = A + B \iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- $\text{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f+g) = \text{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} f + \text{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}\, g$
- $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif
- $\lambda \in \mathbb{K}: \quad B = \lambda \cdot A$ ✎ (2) $\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ b_{ij} = \lambda a_{ij}$
- $\text{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\lambda f) = \lambda\, \text{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$
- $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension np
- une base de $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ où les E_{ij} sont les **matrices élémentaires** :

✎ (2) Dans la pratique, on note λA au lieu de $\lambda \cdot A$.

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & (0) & \vdots & (0) & \\ & & 0 & & \\ 0 & \dots & 0 \ \ 1 \ \ 0 & \dots & 0 \\ & & 0 & & \\ & (0) & \vdots & (0) & \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \quad i^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

$j^{\text{ème}}$ colonne

Le terme général de E_{ij} est $e_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$. Pour $A = [a_{ij}]$ on a $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}E_{ij}$

- L'application $\text{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ f \mapsto \text{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

2.2 – Produit matriciel

- $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = [b_{jk}] \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C = [c_{ik}] \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$:

$$C = A \times B \text{ ✎ (3)} \iff \forall (i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!],\ c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}.$$

✎ (3) Dans la pratique, on note AB au lieu de $A \times B$.

On dit que le produit de A par B (dans l'ordre) est effectué **ligne par colonne**.

Le nombre de colonnes du premier facteur : A, doit être égal au nombre de lignes du second : B.

- Soit E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$:

$$\text{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(g \circ f) = \text{mat}_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(g) \times \text{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:

$$(AB)\,C = A\,(BC)$$

- Soit A, A_1, A_2 dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, B, B_1, B_2 dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, λ dans $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2)\,B &= A_1B + A_2B \\ A\,(B_1 + B_2) &= AB_1 + AB_2 \\ \lambda\,(AB) &= (\lambda A)\,B = A\,(\lambda B) \end{aligned}$$

Copyrighted material

2.3 – Produit par blocs

▪ Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et des entiers non nuls n_1, n_2, p_1, p_2, q_1, q_2 tels que $n = n_1 + n_2$, $p = p_1 + p_2$, $q = q_1 + q_2$.
On considère les décompositions par blocs de A et B, schématisées par :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{de type} \quad \begin{pmatrix} (n_1, p_1) & (n_1, p_2) \\ (n_2, p_1) & (n_2, p_2) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \quad \text{de type} \quad \begin{pmatrix} (p_1, q_1) & (p_1, q_2) \\ (p_2, q_1) & (p_2, q_2) \end{pmatrix}$$

Le produit AB peut alors être effectué par blocs conformément à :

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \quad \text{de type} \quad \begin{pmatrix} (n_1, q_1) & (n_1, q_2) \\ (n_2, q_1) & (n_2, q_2) \end{pmatrix}$$

▪ La formule se généralise à deux décompositions quelconques de A et B à condition que la partition des colonnes de A soit identique à la partition des lignes de B.

Exemple, avec : $n = n_1 + n_2$, $p = p_1 + p_2 + p_3$, $q = q_1 + q_2$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} \quad \text{de type} \quad \begin{pmatrix} (n_1, p_1) & (n_1, p_2) & (n_1, p_3) \\ (n_2, p_1) & (n_2, p_2) & (n_2, p_3) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{pmatrix} \quad \text{de type} \quad \begin{pmatrix} (p_1, q_1) & (p_1, q_2) \\ (p_2, q_1) & (p_2, q_2) \\ (p_3, q_1) & (p_3, q_2) \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} \end{pmatrix}$$

$$\text{de type} \quad \begin{pmatrix} (n_1, q_1) & (n_1, q_2) \\ (n_2, q_1) & (n_2, q_2) \end{pmatrix}$$

2.4 – Écriture matricielle d'une application linéaire

▪ Étant donné des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F de dimensions p et n, rapportés à des bases $\mathcal{U} = (u_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ et $\mathcal{V} = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$.

Pour tout $x \in E$ et $y \in F$ on pose $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{U}}(x)$, $Y = \mathrm{mat}_{\mathcal{V}}(y)$. Alors

$$y = f(x) \iff Y = AX$$

2.5 – Transposition

▪ $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = [a_{ij}]$, la **transposée** de A est :

$${}^tA = [a'_{ij}] \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \quad \text{telle que} \quad \forall (i,j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!], \ a'_{ij} = a_{ji}$$

▪ Soit A, B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, λ dans $\mathbb{K}$: ${}^t(\lambda A + B) = \lambda\, {}^tA + {}^tB$

▪ La transposition $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $A \mapsto {}^tA$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

▪ Transposée d'un produit : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$: ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$

2.6 – Algèbre des matrices carrées d'ordre n

✎ (4) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative si $n \geqslant 2$.

▪ Le produit matriciel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une loi de composition interne. ✎ (4)

▪ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathcal{U} = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$
L'application $\mathrm{mat}_{\mathcal{U}} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f \mapsto \mathrm{mat}_{\mathcal{U}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

▪ Le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé **groupe linéaire d'ordre n sur $\mathbb{K}$** et noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
L'application $\mathrm{mat}_{\mathcal{U}} : \mathrm{GL}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit un isomorphisme de groupes de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

▪ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
- **(1)** A est inversible (c'est-à-dire $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$)
- **(2)** $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = I_n$ (et alors $B = A^{-1}$)
- **(3)** $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $BA = I_n$ (et alors $B = A^{-1}$)
- **(4)** $\det A \neq 0$

▪ Si A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles, alors AB est inversible et : $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

▪ Si A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors ${}^tA$ est inversible et : $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

Copyrighted material

B. Matrices semblables Matrices équivalentes – Rang

1. Changement de base

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 – Matrice de passage ✎ (5)

✎ (5) Algèbre – Géométrie, MPSI ou PCSI. Il s'agit ici d'un bref formulaire.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

$\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux bases de E.

La **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, dans cet ordre, est la matrice du système $\left(e'_1, \ldots, e'_n\right)$ sur la base $\mathcal{B}$, on la note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$:

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\left(e'_1, \ldots, e'_n\right) \quad \text{ou} \quad P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\,\mathcal{B}' \text{ en notation abrégée.}$$

- La matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est aussi la matrice, sur le couple de bases $(\mathcal{B}', \mathcal{B})$, de l'identité de E :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$$

- Toute matrice de passage est inversible : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$

- Produit de deux matrices de passage : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$

1.2 – Formules de changement de bases

- **Formule de changement de bases pour un vecteur**

Soit $x \in E$,

— dans la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

— dans la base $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$, $X' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$

— alors $\boxed{X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X'}$ ✎ (6)

✎ (6) On obtient les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles, alors que la matrice de passage donne les nouveaux vecteurs en fonction des anciens.

- **Formule de changement de bases pour une application linéaire**

Soit :

— E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions non nulles p et n,

— deux bases de E, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$, et leur matrice de passage $P = P_{\mathcal{U},\mathcal{U}'} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$,

— deux bases de F, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$, et leur matrice passage $Q = P_{\mathcal{V},\mathcal{V}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,

— une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et ses matrices associées :

$$M = \mathrm{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) \quad , \quad M' = \mathrm{mat}_{\mathcal{U}',\mathcal{V}'}(f)$$

Alors $\boxed{M' = Q^{-1} M P}$

- **Formule de changement de bases pour un endomorphisme**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension non nulle n rapporté à deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, P la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ et ses matrices associées :

$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) \quad , \quad A' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$$

Alors $\boxed{A' = P^{-1} A P}$

Copyrighted material

2. Matrices semblables

Définition 1

Des matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites **semblables** [7] s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

[7] On définit ainsi une relation binaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, appelée similitude.

Propriété 1

Des matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si, étant donné E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$, il existe $\mathcal{B}'$ base de E telle que $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. [8]

[8] C'est la formule de changement de base pour un endomorphisme.

Propriété 2

La similitude de matrices est une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

☞ Réflexivité : $A = I_n^{-1}AI_n$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Symétrie : pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $B = P^{-1}AP \Rightarrow A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$.

Transitivité : étant donné A, B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,
$B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$ implique $C = Q^{-1}P^{-1}APQ$ donc $C = (PQ)^{-1}A(PQ)$. [9]

[9] $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$.

Propriété 3

Des matrices semblables ont le même déterminant. [10]

[10] Ce résultat est donné ici pour regrouper les propriétés utiles. Pour les étudiants issus de PCSI, il faudra les compléments donnés au chapitre suivant.

☞ Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si elles sont semblables, il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ telles que $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f$ et $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} f$.
Alors, il vient $\det A = \det f = \det B$.

Exemple 1 Si A et B sont semblables, alors il en est de même pour $B - \lambda I_n$ et $A - \lambda I_n$.

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si A et B sont semblables, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
Alors $B - \lambda I_n = P^{-1}AP - \lambda I_n = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}I_nP = P^{-1}(A - \lambda I_n)P$.
En particulier, il vient $\det(B - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n)$.

Propriété 4

Soit A et B semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n et B^n sont semblables.

b) Si de plus A et B sont dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, A^n et B^n sont semblables.

☞ A et B sont les matrices, dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, d'un même endomorphisme f de E.

a) Alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f^n$ et $B^n = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} f^n$, donc A^n et B^n sont semblables.

b) Si A et B sont inversibles, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$A^{-n} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f^{-n}$ et $B^{-n} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} f^{-n}$, donc B^{-n} et A^{-n} semblables. [11]

[11] $B^0 = I_n$ et $A^0 = I_n$ sont évidemment semblables.

Corollaire

Soit A et B semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout polynôme $Q = a_0 + \sum_{k=1}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on pose $Q(A) = a_0 I_n + \sum_{k=1}^{p} a_k A^k$ et $Q(B) = a_0 I_n + \sum_{k=1}^{p} a_k B^k$.
Alors les matrices $Q(A)$ et $Q(B)$ sont semblables.

☞ Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On a donc $B^k = P^{-1}A^kP$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et il vient $Q(B) = P^{-1}\left(a_0 I_n + \sum_{k=1}^{p} a_k A^k\right)P = P^{-1}Q(A)P$.

Copyrighted material

3. Matrices équivalentes – Rang

3.1 – Matrices équivalentes

Définition 2

Des matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites **équivalentes** s'il existe des matrices inversibles $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = QAP$. (12)

(12) On définit ainsi une relation binaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée l'équivalence de matrices.

Propriété 5

Les matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si, étant donné E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions p et n rapportés à des bases respectives $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$, il existe $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{V}'$ bases de E et F telles que $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{U}',\mathcal{V}'}(f)$. (13)

(13) C'est une conséquence aisée de la formule de changement de bases pour une application linéaire rappelée au début de ce chapitre.

Propriété 6

L'équivalence est une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. (14)

(14) Il y a un télescopage fâcheux où le mot «équivalence» a deux rôles différents... mais qui se rejoignent.

☞ Réflexivité : pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = I_n A I_p$.
Symétrie : $B = QAP \Rightarrow A = Q^{-1}BP^{-1}$.
Transitivité : $B = QAP$ et $C = SBR$, avec Q et S dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, P et R dans $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, implique $C = (SQ)A(PR)$, avec $SQ \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $PR \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

3.2 – Rang d'une matrice (15)

(15) Voir Algèbre – Géométrie, PCSI chapitre 10.

Définition 3

Le rang d'une matrice est le rang du système de ses vecteurs-colonnes. On le note $\mathrm{rg}\, M$.

Propriété 7

Rang d'une application linéaire et d'une matrice associée
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions non nulles p et n,
$\mathcal{U} = (u_j)_{j \in [\![1,p]\!]}$, $\mathcal{V} = (v_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ des bases de E et F,
une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$.
On a alors : $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, M$. (16)

(16) En particulier, une matrice a le même rang que l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associée.

☞ Le rang de f est la dimension du sous-espace de F engendré par $\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\}$.
Ces vecteurs sont les images des vecteurs colonnes de M par l'isomorphisme Φ de $\mathbb{K}^n$ sur F dont l'image de la base canonique $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est $\mathcal{V}$. (17)

(17) $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\Phi(e_i) = v_i$.

Corollaire

Si A et B sont équivalentes dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors elles ont le même rang.

Propriété 8

Si f est une application linéaire de matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors :
$$\mathrm{rg}\, M = n \iff f \text{ surjective} \quad , \quad \mathrm{rg}\, M = p \iff f \text{ injective}$$

Corollaire

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}\, M = n \iff M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 9

Rang d'un produit matriciel
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
a) $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \sup\{\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B\}$,
b) Si $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$: $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}\, B$. Si $B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$: $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}\, A$.

Copyrighted material

3.3 – Matrice canonique d'une application linéaire

La matrice canonique d'une application linéaire a été vue au chapitre 1, théorème 24.

Propriété 10

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à : [18]

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

[18] À M, on associe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et on forme la matrice canonique de f.

Théorème 1

Égalité des rangs d'une matrice et de sa transposée

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} {}^tM$$

☞ $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ étant équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$, ${}^tM \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est équivalente à ${}^tJ_r = J_r' = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{pmatrix}$. [19]

Donc la propriété 10 donne $\operatorname{rg} M = r = \operatorname{rg} {}^tM$.

[19] $M = PJ_rQ$ donne ${}^tM = {}^tQ\,{}^tJ_r\,{}^tP$ avec P et ${}^tP$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, Q et ${}^tQ$ dans $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$.

Corollaire

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(c_1, \ldots, c_p)$ ses vecteurs-colonnes, $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ ses vecteurs-lignes.

Alors $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(c_1, \ldots, c_p) = \operatorname{rg}(\ell_1, \ldots, \ell_n) \leqslant \inf(p, n)$.

Théorème 2

Caractérisation de l'équivalence des matrices

Des matrices M et M' de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

☞ Si elles sont équivalentes, la condition nécessaire a été vue. [20]

Si elles ont le même rang r, elles sont équivalentes à J_r donc équivalentes entre elles par transitivité de cette relation.

[20] Corollaire de la propriété 7.

C. Opérations élémentaires

1. Méthodes

1.1 – Permutations de lignes ou colonnes d'une matrice

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $P_\sigma(n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de la permutation σ.

$$P_\sigma(n) = \left[\delta_{i,\sigma(j)}\right]$$ [21]

[21] Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, P_σ est la matrice dans cette base de l'endomorphisme f_σ défini pae $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

Propriété 11

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

a) $AP_\sigma(p)$ se déduit de A par la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ sur les colonnes de A.

b) ${}^tP_\sigma(n)A$ se déduit de A par la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ sur les lignes de A.

Copyrighted material

1.2 – Opérations élémentaires

Définition 4

On appelle opérations élémentaires sur une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

a) la transposition de deux lignes ou de deux colonnes de A,

b) l'addition à une ligne r d'une autre ligne s, donc $s \neq r$, multipliée par $\lambda \in \mathbb{K}$,
ou l'addition à une colonne r d'une autre colonne s, donc $s \neq r$, multipliée par $\lambda \in \mathbb{K}$,

c) le produit par $\lambda \in \mathbb{K}^*$ d'une ligne ou d'une colonne r. (22)

(22) $L_1, \dots, L_n$ désignant les lignes de A et $C_1, \dots, C_p$ ses colonnes, ces transformations peuvent être symbolisées par :
$L_r \rightleftarrows L_s$, $C_r \rightleftarrows C_s$
$L_r \leftarrow L_r + \lambda L_s$,
$C_r \leftarrow C_r + \lambda C_s$
$L_r \leftarrow \lambda L_r$, $C_r \leftarrow \lambda C_r$.

Propriété 12

Les opérations élémentaires peuvent être réalisées en effectuant le produit de A par une matrice carrée inversible. (23)

(23) Les matrices carrées inversibles détaillées ci-dessous sont dites matrices de transformations élémentaires.

a) Soit $P_{rs} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de la transposition $\tau = (r, s)$ qui échange r et s.

$$P_{rs} = \begin{pmatrix} & & & r & & s & & \\ 1 & & & \vdots & & \vdots & & \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \vdots & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$P_{rs}A$ est la matrice qui se déduit de A en échangeant les lignes r et s. (24)

b) Soit $r \neq s$. Alors $(I_n + \lambda E_{rs})A$ est la matrice qui se déduit de A en ajoutant à la ligne r le produit par λ de la ligne s.

c) $\left(I_n + (\lambda - 1)E_{rr}\right)A$ est la matrice qui se déduit de A en multipliant la ligne r par λ.

d) En procédant de même avec les matrices carrées d'ordre p :

P'_{rs} est la matrice de la transposition $\tau'_{rs} \in \mathfrak{S}_p$ échangeant r et s

$I_p + \lambda E'_{sr}$ ou $I_p + (\lambda - 1)E'_{rr}$ $\lambda \neq 0$

on obtient les opérations élémentaires sur les colonnes de A avec :

AP'_{rs} ou $A\left(I_p + \lambda E'_{sr}\right)$ ou $A\left(I_p + (\lambda - 1)E'_{rr}\right)$

(24) $P_{rs} = I_n - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr}$ où $(E_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Calcul du rang

Propriété 13

Toute opération élémentaire transforme une matrice A en une matrice de même rang que A.

Propriété 14

Étant donné $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathrm{rg}(A) = r$

(2) il existe $T_1, \dots, T_q$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $T'_1, \dots, T'_s$ dans $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, matrices de transformations élémentaires telles que : $T_q T_{q-1} \cdots T_1 A T'_1 \cdots T'_s = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Avec les notations précédentes, en posant :

$$P = T_q T_{q-1} \cdots T_1 I_n \quad \text{et} \quad Q = I_p T'_1 \cdots T'_s,$$

on a

$$PAQ = \begin{pmatrix} Ir & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

P (resp. Q) s'obtient en effectuant à partir de I_n (resp. de I_p) la même suite de transformations élémentaires que celle qui a été faite sur les lignes (resp. les colonnes) à partir de A.

Copyrighted material

Exemple 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 9 & -9 \\ 3 & 5 & -1 & -8 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,4}(\mathbb{R})$.

Calculer le rang r de A et trouver $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, $Q \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$ telles que :

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

✎ (25) Une bonne calculatrice ou un logiciel tel que Maple facilitera grandement le travail.

Commençons par des transformations élémentaires sur les colonnes : ✎ (25)

Premières opérations :

$C_2 \longleftarrow C_2 - 2C_1$. $C_3 \longleftarrow C_3 + C_1$. $C_4 \longleftarrow C_4 + 4C_1$. $C_5 \longleftarrow C_5 - C_1$

$$A \longrightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 5 & 17 & -11 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad . \quad I_5 \longrightarrow Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2$. $C_4 \longleftarrow C_4 + 2C_2$. $C_5 \longleftarrow C_5 - C_2$

$$A_1 \longrightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 5 & 5 & -5 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad . \quad Q_1 \longrightarrow Q_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Effectuons ensuite $C_4 \longleftarrow C_4 - C_3$. $C_5 \longleftarrow C_5 + C_3$. $C_3 \longleftarrow \frac{1}{5}C_3$,

et $C_1 \longleftarrow C_1 + 4C_3$. $C_2 \longleftarrow C_2 + 6C_3$

$$A_2 \longrightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{18}{5} & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad Q_2 \longrightarrow Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis opérons ensuite sur les lignes.

$L_4 \longleftarrow L_4 - \frac{18}{5}L_1$. $L_4 \longleftarrow L_4 - \frac{7}{5}L_2$. $L_4 \longleftarrow L_4 - \frac{2}{5}L_3$

$$A_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad I_4 \longrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{18}{5} & -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

D'où les matrices P et Q et le rang : $r = 3$.

Remarque

Pour le calcul du rang, on peut se contenter de transformer, par une suite d'opérations élémentaires, A en :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 1 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A'' = \begin{pmatrix} 1 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 1 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 1 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Copyrighted material

3. Calcul de l'inverse éventuelle d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) A est inversible,

(2) il existe $T_1, \ldots, T_q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ matrices de transformations élémentaires telles que $AT_1, \ldots, T_q = I_n$

(3) il existe $T'_1, \ldots, T'_s \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ matrices de transformations élémentaires telles que $T'_s, \ldots, T'_1 A = I_n$

Pratiquement,

- si on opère sur les colonnes :

$A^{-1} = I_n T_1, \ldots, T_q$ se déduit de I_n par la suite des transformations élémentaires sur les colonnes qui font passer de A à I_n.

- si on opère sur les lignes :

$A^{-1} = T'_s, \ldots, T'_1 I_n$ se déduit de I_n par la suite de transformations élémentaires sur les lignes qui font passer de A à I_n.

Exemple 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.

Opérons sur les colonnes :

$C_2 \longleftarrow C_2 - 2C_1 \ , \ C_3 \longleftarrow C_3 - C_1 \ , \ C_4 \longleftarrow C_4 - C_1$

$$A \longrightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad I_4 \longrightarrow B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_2 \longleftarrow -C_2 \ , \ C_1 \longleftarrow C_1 - 2C_2 \ , \ C_4 \longleftarrow C_4 - C_2$

$$A_1 \longrightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B_1 \longrightarrow B_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_3 \longleftarrow C_3 \times \frac{1}{2} \ , \ C_1 \longleftarrow C_1 - 3C_3 \ , \ C_2 \longleftarrow C_2 + 2C_3 \ , \ C_4 \longleftarrow C_4 - 2C_3$

$$A_2 \longrightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B_2 \longrightarrow B_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_4 \longleftarrow C_4 \times (-1) \ , \ C_1 \longleftarrow C_1 + 5C_4 \ , \ C_2 \longleftarrow C_2 - 3C_4 \ , \ C_3 \longleftarrow C_3 - 3C_4$

$$A_3 \longrightarrow I_4 \quad , \quad B_3 \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} & -5 & -\frac{13}{2} & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \\ \frac{7}{2} & -2 & -\frac{5}{2} & 1 \\ -5 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Copyrighted material

D. Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

1. Trace d'une matrice carrée

Définition 5

On appelle **trace d'une matrice carrée** $M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le scalaire, noté $\mathrm{Tr}(M)$, somme des éléments diagonaux de M : $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$.

Théorème 3

a) L'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$ est une forme linéaire non nulle.

b) Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

☞ a) La linéarité de l'application «trace» de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ est immédiate.

b) Considérons $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
Notons que les matrices produits $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ne sont *a priori* pas de même ordre.
Soit $C = AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; son terme général est $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$ et

on a $\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{ki}$ et de même, $\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik}$

On voit alors que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Remarque

Avec dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BAC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $\mathrm{Tr}(ABC) \neq \mathrm{Tr}(BAC)$.
En revanche, le théorème ci-dessus permet de dire que $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB) = \mathrm{Tr}(BCA)$.

Propriété 15

Le noyau de la trace est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont un supplémentaire est le sous-espace des matrices scalaires : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathbb{K} I_n$.

Il suffit de remarquer que la forme linéaire Tr n'est pas la forme nulle et que $\mathrm{Tr}(I_n) = n$.

Exemple 4 Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(XY) = \varphi(YX)$.
Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \alpha\,\mathrm{Tr}$.

Le choix de $X = E_{ij}$, $Y = E_{kl}$ donne : $XY = \delta_{jk} E_{il}$, $YX = \delta_{li} E_{kj}$.
D'où $\delta_{jk}\, \varphi(E_{il}) = \delta_{li}\, \varphi(E_{kj})$.

- Pour $j = k$ et $i \neq l$, on a $\varphi(E_{il}) = 0$.
- Pour $j = k$ et $i = l$, on a $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$.

Il existe donc $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha = \varphi(E_{ii})$; ainsi $\varphi = \alpha\,\mathrm{Tr}$.

Propriété 16

Des matrices carrées semblables ont la même trace.

☞ Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Leur similitude s'exprime par l'existence de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
On a donc $\mathrm{Tr}\, B = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP)$. Or $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(PP^{-1}A) = \mathrm{Tr}\, A$.

Copyrighted material

2. Trace d'un endomorphisme

Définition 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Le scalaire $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$.
Il est appelé «trace de f» et noté $\mathrm{Tr}(f)$.

Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, les matrices $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ sont semblables et ont donc la même trace.

Propriété 17

L'application «trace» $\mathscr{L}(E) \to \mathbb{K}$, $f \mapsto \mathrm{Tr}(f)$ est une forme linéaire non nulle.

Propriété 18

Quels que soient les endomorphismes f et g de E :

$$\mathrm{Tr}(f \circ g) = \mathrm{Tr}(g \circ f)$$

Propriété 19

Si $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E et $\mathscr{B}^* = (e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base duale :

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*\left(f(e_i)\right)$$

Exemple 5 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et f_A l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ défini par : $f_A : M \mapsto AM$
Calculer $\mathrm{Tr}(f)$ en fonction de $\mathrm{Tr}(A)$.

Soit $\left(E_{ij}\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ la base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ formée par les matrices élémentaires, [26]
et $\left(E_{ij}^*\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ sa base duale.

[26] c'est-à-dire la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour $M = \left[m_{ij}\right]$ on a $f_A(M) = \left[m'_{ij}\right]$ avec : $E_{ij}^*\left(f_A(M)\right) = m'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{kj}$, donc :

$$E_{ij}^*\left(f_A(E_{ij})\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kl} = a_{li}.$$

On en déduit : $\mathrm{Tr}\left(f_A\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_{ij}^*\left(f_A(E_{ij})\right) = n\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = n\,\mathrm{Tr}(A)$.

Théorème 4

Pour tout projecteur p d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, on a $\mathrm{rg}\, p = \mathrm{Tr}\, p$.

☞ Puisque p est un projecteur, on a $\mathrm{Inv}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p = E$.
On considère une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \ldots, e_r)$ soit une base de $\mathrm{Inv}\, p$ et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}\, p$. [27]
La matrice de p dans $\mathscr{B}$ est $B = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$, d'où $\mathrm{rg}\, B = r = \mathrm{Tr}\, B$.

[27] $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la somme directe $E = \mathrm{Inv}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$.

Exemple 6 Exemple d'endomorphisme f tel que $\mathrm{Tr}\, f = \mathrm{rg}\, f$, bien que f ne soit pas un projecteur.

L'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas idempotent car : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.
Cependant, on a $\mathrm{Tr}\, A = 2 = \mathrm{rg}\, A$.

Copyrighted material

E. Systèmes d'équations linéaires

1. Notion d'équation linéaire

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. [28]

[28] Les notions rappelées ci-après ont été introduites en Algèbre – Géométrie, PCSI, chapitre 11.

Définition 7

Étant donné $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$, l'équation :

(L) : $x \in E,\ f(x) = b$ est appelée l'**équation linéaire** associée à (f, b).

(H) : $x \in E,\ f(x) = 0_F$ est l'**équation homogène** associée à (L).

Notation 1

On note $S(L) = \{x \in E \,/\, f(x) = b\}$ l'ensemble des solutions de (L)

et $S(H) = \{x \in E \,/\, f(x) = 0_F\}$ l'ensemble des solutions de (H).

Remarque

$S(H)$ est le noyau de f. C'est donc un sous-espace vectoriel de E.

Il contient en particulier 0_E qui est appelé la **solution banale** (ou triviale) de (H).

Définition 8

L'équation (L) est dite **possible** lorsque l'ensemble $S(L)$ n'est pas vide.

Remarque

L'équation (L) est possible si et seulement si b appartient à l'image de f.

Propriété 20

L'ensemble $S(L)$ des solutions de (L) est un sous-espace affine de E.

Si x_0 est une solution de (L), on a $S(L) = x_0 + S(H)$.

☞ Si (L) est possible, considérons $x_0 \in S(L)$. Il vient alors :

$$f(x) = b \iff f(x) = f(x_0) \iff f(x - x_0) = 0_F \iff x - x_0 \in S(H)$$

c'est-à-dire $x \in S(L) \iff x \in x_0 + S(H)$.

Propriété 21

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $(b_1, b_2) \in F^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et les équations linéaires

$(L_1) : x \in E, f(x) = b_1$ $(L_2) : x \in E, f(x) = b_2$ $(L) : x \in E, f(x) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

Si (L_1) et (L_2) sont possibles, alors (L) est possible et $S(L) = \lambda_1 S(L_1) + \lambda_2 S(L_2)$.

☞ Soit $x_1 \in S(L_1)$ et $x_2 \in S(L_2)$: $f(x_1) = b_1$ et $f(x_2) = b_2$.

On a donc $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$ et (L) est possible, de solution particulière $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$.

Il s'ensuit $S(L) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + S(H)$.

Or $S(H) = \lambda_1 S(H) + \lambda_2 S(H)$ d'où :

$$S(L) = \lambda_1 \big(x_1 + S(H)\big) + \lambda_2 \big(x_2 + S(H)\big) = \lambda_1 S(L_1) + \lambda_2 S(L_2).$$

Copyrighted material

2. Système d'équations linéaires

2.1 – Notations

- $E = \mathbb{K}^p$, $F = \mathbb{K}^n$ avec n et p dans $\mathbb{N}^*$.
- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ les bases canoniques de E et F.
- $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = [b_i] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $r = \operatorname{rg} A$.
- $(c_1, \dots, c_p)$ la famille des vecteurs-colonnes de A et $b \in F$ le vecteur-colonne de B.
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$ canoniquement associée à A : $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
- (L) l'équation linéaire associée à (f, b) et (H) l'équation homogène associée.

2.2 – Interprétations des équations (L) et (H)

Fonctionnelle :	$f(x) = b$	$f(x) = 0_F$	$x \in E$
Matricielle :	$AX = B$	$AX = 0$	$X \in \mathcal{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$
Vectorielle :	$\sum_{j=1}^{p} x_j c_j = b$	$\sum_{j=1}^{p} x_j c_j = 0_F$	$(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$
Analytique :	$\begin{cases} a_{1\,1}x_1 + \dots + a_{1\,p}x_p = b_1 \\ a_{2\,1}x_1 + \dots + a_{2\,p}x_p = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n\,1}x_1 + \dots + a_{n\,p}x_p = b_n \end{cases}$	$\begin{cases} a_{1\,1}x_1 + \dots + a_{1\,p}x_p = 0 \\ a_{2\,1}x_1 + \dots + a_{2\,p}x_p = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n\,1}x_1 + \dots + a_{n\,p}x_p = 0 \end{cases}$	$(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$

3. Application au calcul de l'inverse d'une matrice

Système de Cramer

Un système de n équations à n inconnues est dit de Cramer quand il admet une solution et une seule.

Ce cas sera repris au chapitre suivant (Déterminants).

La solution d'un système de Cramer $AX = B$ (en écriture matricielle) est $X = A^{-1}B$.

Les expressions des x_i à l'aide des b_j donnent alors la matrice A^{-1}.

Pour $n \geqslant 3$, il est souvent pratique de déterminer l'inverse d'une matrice par le biais de la résolution d'un système linéaire.

Exemple 7 Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & (0) \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & & 1 & 2 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 3$.

$\det A = 1$ donc A est inversible. [29] À la matrice A, on associe le système de Cramer :

$$(S) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = y_1 & E_1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = y_2 & E_2 \\ \dots\quad\dots\quad\dots & \dots \\ x_{n-2} + 2x_{n-1} + x_n = y_{n-2} & E_{n-2} \\ x_{n-1} + 2x_n = y_{n-1} & E_{n-1} \\ x_n = y_n & E_n \end{cases}$$

[29] Cette remarque n'est pas indispensable pour la solution.

Copyrighted material

Pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, effectuons sur les équations la combinaison linéaire symbolisée par :

$$E_i \longleftarrow \sum_{k=i}^{n} (-1)^{k+i} E_k \,. \quad \text{Il vient :} \quad \begin{cases} x_i + x_{i+1} = \displaystyle\sum_{k=i}^{n} (-1)^{k+i} y_k & 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ x_n = y_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 - y_2 + y_3 + \cdots + (-1)^{n+1} y_n & E'_1 \\ -x_2 - x_3 = -y_2 + y_3 + \cdots + (-1)^{n+1} y_n & E'_2 \\ x_3 + x_4 = y_3 + \cdots + (-1)^{n+1} y_n & E'_3 \\ \cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots & \\ (-1)^n (x_{n-1} + x_n) = (-1)^n y_{n-1} + (-1)^{n+1} y_n & E'_{n-1} \\ (-1)^{n+1} x_n = (-1)^{n+1} y_n & E'_n \end{cases}$$

D'où en effectuant les combinaisons linéaires $E_i \longleftarrow \displaystyle\sum_{k=i}^{n} E'_k$:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + 3y_3 + \cdots + (-1)^{n+1} n y_n \\ x_2 = y_2 - 2y_3 + (-1)^n (n-1) y_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_{n-1} = y_{n-1} - 2y_n \\ x_n = y_n \end{cases}$$

Il en résulte :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \cdots & (-1)^n (n-1) & (-1)^{n+1} n \\ 0 & 1 & -2 & 3 & \cdots & (-1)^{n-1} (n-2) & (-1)^n (n-1) \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & & (-1)^{n-1} (n-2) \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & (0) & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & \\ \vdots & & & & & 1 & -2 \\ 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Système linéaire : cas général

Considérons, avec les notations du paragraphe **2**, le système linéaire défini par :

$$f(x) = b \quad \text{ou} \quad AX = B$$

$S(H)$ est un sous-espace de dimension $p - r$ de $\mathbb{K}^p$ où $r = \text{rg}(f) = \text{rg}(A)$.

Si le système (L) est possible, $S(L)$ est un sous-espace affine de direction $S(H)$.

La méthode du pivot de Gauss

Les colonnes de A forment un système de rang r.

À une permutation près des inconnues $x_1, \cdots, x_p$ on peut donc se ramener au cas d'un système :

$$AX = B \quad \textbf{(1)}$$

dans lequel les r premières colonnes de A forment un système libre.

Copyrighted material

On sait alors qu'il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme A en une matrice T de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \times & \dots & & \dots & \dots & \times \\ 0 & 1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ \vdots & & & 1 & \times & \dots & \times \\ \vdots & & & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & & & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Matriciellement, cela donne l'existence de $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, produit de matrices de transformations élémentaires, telle que :

$$T = PA$$

et P étant inversible, on a :

$$AX = B \iff PAX = PB$$

C'est-à-dire que le système **(1)** a les mêmes solutions que :

$$TX = PB \quad \textbf{(2)}$$

On dit que les **systèmes (1)** et **(2)** sont **équivalents**.

Il y a lieu de remarquer que la transformation de **(1)** en **(2)** s'obtient en effectuant sur les équations de **(1)** la suite d'opérations élémentaires qui fait passer de A à T. Dans la pratique on pourra, de façon à se dispenser d'écrire les inconnues lors de ces manipulations, effectuer la suite d'opérations en question sur la matrice :

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

formée par les deux blocs A et B.

Au niveau de **(2)**, la discussion est facile. Ce système s'écrit :

$$\textbf{(2)} \quad \begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1p}x_p = \beta_1 \\ \quad x_2 + \dots + \alpha_{2p}x_p = \beta_2 \\ \quad\quad \ddots \\ \quad\quad\quad x_r + \dots + \alpha_{rp}x_p = \beta_r \\ \quad\quad\quad\quad\quad 0 = \beta_{r+1} \\ \quad\quad\quad\quad\quad \dots \quad \dots \\ \quad\quad\quad\quad\quad 0 = \beta_n \end{cases}$$

- il est possible si et seulement si $\beta_{r+1} = \beta_{r+2} = \dots = \beta_n = 0$
- si cette condition est réalisée, les r premières équations donnent, en cascade et de manière unique, $x_1, \dots, x_r$ en fonction de $x_{r+1}, \dots, x_p$.

Exemple 8 Résoudre dans $\mathbb{C}^4$ le système (S) $\begin{cases} x+y+z+at = 1 & E_1 \\ x+y+az+t = b & E_2 \\ x+ay+z+t = b^2 & E_3 \\ ax+y+z+t = b^3 & E_4 \end{cases}$

a et b sont des complexes donnés.

Sans que cela soit indispensable, on peut former le déterminant du système :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$$

Donc, pour $a \notin \{1, -3\}$, on a affaire à un système de Cramer. On résoud alors en évitant soigneusement les formules de Cramer.

Copyrighted material

Pour cela, en formant $\sum_{i=1}^{4} E_i$, on a $(a+3)(x+y+z+t) = 1+b+b^2+b^3$ et, pour $a \neq -3$, une solution (x, y, z, t) vérifie :

$$x+y+z+t = \frac{1+b+b^2+b^3}{a+3} \qquad E_5$$

Par combinaisons linéaires de E_5 et E_i, $i = 1, 2, 3, 4$, on obtient, pour $a \neq 1$:

$$x = \frac{(a+2)b^3 - 1 - b - b^2}{(a-1)(a+3)} \quad , \quad y = \frac{(a+2)b^2 - 1 - b - b^3}{(a-1)(a+3)}$$

$$z = \frac{(a+2)b - 1 - b^2 - b^3}{(a-1)(a+3)} \quad , \quad t = \frac{(a+2) - b - b^2 - b^3}{(a-1)(a+3)}$$

Ce qui donne une solution et une seule pour $a \notin \{1, -3\}$.

Étudions maintenant les cas $a = 1$ et $a = -3$.

- Dans le cas $a = 1$, il est clair que le système est possible si et seulement si $b = 1$ et alors il est équivalent à $x+y+z+t = 1$.
- Dans le cas $a = -3$, le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x+y+z-3t = 1 & E_1 \\ x+y-3z+t = b & E_2 \\ x-3y+z+t = b^2 & E_3 \\ 0 = 1+b+b^2+b^3 & E_4' \longleftarrow \sum_{i=1}^{4} E_i \end{cases}$$

Avec $1+b+b^2+b^3 = (1+b^2)(1+b)$ on voit que :

- pour $b \notin \{-1, i, -i\}$, (S) est impossible,
- pour $b \in \{-1, i, -i\}$, (S) équivaut à (S') :

$$(S') \begin{cases} x+y+z-3t = 1 \\ x+y-3z+t = b \\ x-3y+z+t = b^2 \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} x = t + \frac{1-b^3}{4} \\ y = t + \frac{1-b^2}{4} \\ z = t + \frac{1-b}{4} \end{cases}$$

Copyrighted material

L'essentiel

I. Matrices semblables et trace

✔ La trace est une forme linéaire non nulle.

✔ Propriété fondamentale : $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

✔ **Si l'on veut** utiliser que deux matrices sont semblables

▪ **on peut** écrire l'égalité de leurs traces.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 1, 2,

✔ **Si l'on veut** étudier un problème en termes de matrices

▪ **on peut** l'exprimer en termes d'endomorphismes.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 2, 3, 4, 6

II. Trace et projecteurs

✔ Propriété fondamentale d'un projecteur : $\mathrm{Tr}\, p = \mathrm{rg}\, p$.

✔ **Si l'on veut** Montrer qu'une matrice est idempotente

▪ **on peut** construire une matrice idempotente qui lui est semblable.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 3

✔ **Si l'on veut** Montrer qu'une somme de matrices idempotentes est idempotente

▪ **on peut** mettre en évidence des sous-espaces en somme directe.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 4

III. Commutateur de deux matrices

✔ **Si l'on veut** calculer la trace d'un carré de matrice $AB - BA$

▪ **on peut** mettre en œuvre la symétrie ou l'antisymétrie.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 5

✔ **Si l'on veut** montrer qu'un commutateur $AB - BA$ est nilpotent,

▪ **on peut** étudier l'endomorphisme $M \mapsto MB - BM$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 6

Copyright

Mise en œuvre

I. Matrices semblables et trace.

Ex. 1

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $S(A) = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} a_{ij}a_{ji}$.

Montrer que si A et B sont semblables, alors $S(A) = S(B)$.

Indications

La trace est la même pour deux matrices semblables. On tente alors d'exprimer $S(A)$ à l'aide de $\mathrm{Tr}\, A$.

Solution

On a $S(A) = \sum_{i \in [\![1,n]\!]} \left(\sum_{j \in [\![1,n]\!]} a_{ij}a_{ji} \right)$.

Or $\sum_{j \in [\![1,n]\!]} a_{ij}a_{ji}$ n'est autre que le terme d'indice (i,i) de la matrice A^2.

Il s'ensuit que $S(A) = \mathrm{Tr}(A^2)$.

Les matrices semblables A^2 et B^2 ont la même trace.
L'égalité $\mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}(B^2)$ donne enfin $S(A) = S(B)$.

Commentaires

On décompose la somme sur $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Si des matrices A et B sont semblables, il en est de même pour A^2 et B^2.

Ex. 2

1) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de trace nulle, alors elle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
2) Étant donné une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à termes diagonaux deux à deux distincts, étudier le noyau et l'image de
$$\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) \text{ défini par } \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi(M) = DM - MD.$$
3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, Montrer que $\mathrm{Tr}\, A = 0$ si et seulement si il existe R et S dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = RS - SR$.

Indications

Pour la première question, on traduit en terme d'endomorphisme f canoniquement associé à A. On procède par récurrence sur n.

L'image de φ est l'ensemble des matrices à termes diagonaux tous nuls.

Solution

1) Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $E = \mathbb{K}^n$; on pose $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0} f$.
Le résultat est banal pour $A = 0$ et pour $n = 1$.
Supposons $A \neq 0$, $n \geqslant 2$ et le résultat acquis pour $n - 1$.
Premier cas : pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est lié. Alors f est une homothétie.
Avec $f = k\,\mathrm{Id}$, $\mathrm{Tr}\, f = 0$ donne $k = 0$, donc $f = 0$.

Commentaires

Voir MPSI ou Algèbre – Géométrie, PCSI, chapitre 9, mise en œuvre.

Copyrighted material

Second cas : il existe $a \in E$ tel que $\left(a, f(a)\right)$ soit libre. On complète en une base $\mathcal{B} = (a, f(a), e_3, \ldots, e_n)$.
Dans une telle base, la matrice de f est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 1 & & & \\ 0 & & B' & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{Tr} A = 0$ donne $\operatorname{Tr} B' = 0$, donc il existe $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}B'Q$ soit de diagonale nulle.

B est semblable à A.
$B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, $\operatorname{Tr} B' = \operatorname{Tr} B = \operatorname{Tr} A$.
Hypothèse de récurrence.

Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ et
$C = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & L \\ M & Q^{-1}B'Q \end{pmatrix}$ est de trace nulle.

Et A est semblable à C.

En conséquence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Par récurrence sur n.

2) Avec $M = \left[m_{ij}\right]$, $\varphi(M)$ est la matrice $\left[(d_i - d_j)m_{ij}\right]$.

M est dans le noyau de φ si et seulement si elle est diagonale. Et le sous-espace des matrices diagonales est de dimension n.

$\forall (i,j),\ i \neq j$ et $(d_i - d_j)m_{ij} = 0$ implique $m_{ij} = 0$.

Les éléments de l'image ont tous leurs termes diagonaux nuls, et l'ensemble des matrices de diagonale nulle est un sous-espace $\mathcal{M}'$ de dimension $n^2 - n$, comme $\operatorname{Im}\varphi$. Donc $\operatorname{Im}\varphi = \mathcal{M}'$.

Théorème du rang.

3) Si $A = RS - SR$, alors évidemment $\operatorname{Tr} A = 0$.

Si A est de trace nulle, elle est semblable à un élément A' de $\mathcal{M}'$.

Première question.

Et il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = DC - CD$.

Deuxième question.

Avec $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = TA'T^{-1}$, il vient
$A = TDCT^{-1} - TCDT^{-1} = (TDT^{-1})(TCT^{-1}) - (TCT^{-1})(TDT^{-1})$.

On a terminé, avec $R = TDT^{-1}$ et $S = TCT^{-1}$.

II. Trace et projecteurs

Ex. 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que, si $\operatorname{rg} A = 1$ et $\operatorname{Tr} A = 1$, alors $A^2 = A$.

Indications

Considérer l'endomorphisme p de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.
La trace et le rang d'un projecteur sont égaux. C'est une réciproque qui est étudiée.

Solution

Le rang de A étant 1, on a $\dim \operatorname{Ker} p = n - 1$. On complète une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de $\operatorname{Ker} p$ en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$.

Alors A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

$\operatorname{Tr} A = 1$ implique $\operatorname{Tr} B = 1$, donc $\lambda_n = 1$ et on obtient aisément $B^2 = B$.

Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et il s'ensuit $A^2 = A$.

Commentaires

Exploitation de $\operatorname{rg} A = 1$.

B matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.

Exploitation de la seconde hypothèse.

Ex. 4

Soit $(A_k)_{k\in[\![1,s]\!]}$ une famille de s éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall k\in[\![1,s]\!]$, $A_k^2 = A_k$ et on pose $A = \sum_{k=1}^{s} A_k$.

Montrer que $\forall (i,j)\in[\![1,s]\!]^2$, $i\neq j \Rightarrow A_iA_j = 0$ équivaut à $A^2 = A$.

Indications

Utiliser $U^2 = U \Rightarrow \operatorname{rg} U = \operatorname{Tr} U$.

Avec $p_k \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A_k, montrer que la somme des $\operatorname{Im} p_k$ est directe.

Solution

1) On a $A^2 = \sum_{k=1}^{s} A_k^2 + \sum_{i\neq j} A_iA_j$.

Avec $\forall (i,j)\in[\![1,s]\!]^2$, $i\neq j \Rightarrow A_iA_j = 0$, il vient $A^2 = A$.

2) Soit $p_k \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, de matrice A_k dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$,

et $p = \sum_{k=1}^{s} p_k$. Avec $A = \sum_{k=1}^{s} A_k$ il vient $\operatorname{rg} A \leqslant \sum_{k=1}^{s} \operatorname{rg} A_k$.

Par ailleurs, on a $\sum_{k=1}^{s} \operatorname{rg} A_k = \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Tr} A_k = \operatorname{Tr} A$.

Alors $\operatorname{rg} A \leqslant \sum_{k=1}^{s} \operatorname{rg} A_k = \operatorname{Tr} A$, donc $\operatorname{rg} A = \sum_{k=1}^{s} \operatorname{rg} A_k$.

$\dim \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{s} p_k\right) = \sum_{k=1}^{s} \dim(\operatorname{Im} p_k)$ implique que $\operatorname{Im} p = \bigoplus_{k=1}^{s} \operatorname{Im} p_k$.

Pour tous $x\in\mathbb{K}^n$ et $j\in[\![1,s]\!]$, on a $p_j(x) = p\left(p_j(x)\right) = \sum_{i=1}^{s} p_i\left(p_j(x)\right)$.

L'unicité de la décomposition de $p_j(x)$ suivant les $\operatorname{Im} p_i$ donne alors $p_i\left(p_j(x)\right) = 0$ pour $i\neq j$. Ainsi, $\forall (i,j)\in[\![1,s]\!]$, $i\neq j \Rightarrow p_i\circ p_j = 0$, ou encore, $\forall (i,j)\in[\![1,s]\!]$, $i\neq j \Rightarrow A_iA_j = 0$.

Commentaires

A priori, les A_k ne commutent pas.

La condition suffisante est banale.

A est alors la matrice de $p = \sum p_k$.

$\operatorname{rg}\left(\sum p_k\right) \leqslant \sum \operatorname{rg}(p_k)$.

$A_k^2 = A_k \Rightarrow \operatorname{rg} A_k = \operatorname{Tr} A_k$.

$A^2 = A \Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{Tr} A$.

p est un projecteur, donc $\operatorname{Im} p = \operatorname{Inv} p$.

La somme est directe et $p_j(x) = p_j\left(p_j(x)\right)$.

III. Commutateur de deux matrices

Ex. 5

Soit A et B deux matrices antisymétriques réelles d'ordre n.

1) Montrer que $\operatorname{Tr}(AB - BA)^4 \geqslant 0$.

2) Que peut-on dire de A et B lorsque cette trace est nulle ?

Indications

Le point clé est que $AB - BA$ est antisymétrique. Cette situation est également vraie si A et B sont symétriques.

Solution

1) Avec l'antisymétrie de A et de B, la matrice $AB - BA$ est antisymétrique.

Alors $C = (AB - BA)^2$ est symétrique.

Commentaires

${}^t(AB - BA) = {}^t(AB) - {}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB - {}^tB\,{}^tA$.

Si une matrice est antisymétrique, son carré est symétrique.

Copyrighted material

Avec $C = [c_{ij}]$, on a $\mathrm{Tr}(C^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ik}^2 \geqslant 0$.

La trace de $(AB-BA)^4$ est celle de C^2.

2) Le même calcul montre que

$$\mathrm{Tr}(C^2) = 0 \iff \forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2,\ c_{ik} = 0.$$

Posons $AB - BA = [d_{ij}]$.

Alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}d_{ki} = -\sum_{k=1}^{n} d_{ik}^2$.

car $AB-BA$ est antisymétrique.

On en déduit $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $d_{ik} = 0$, c'est-à-dire $AB = BA$.

Ex. 6

Étant donné A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $C = AB - BA$.

Montrer que si C est colinéaire à A ou à B, alors elle est nilpotente.

Indications

Si $C = \lambda A$, il suffit de montrer que A est nilpotente. Considérer l'application linéaire $\varphi : M \mapsto MB - BM$.

Solution

On suppose que $C = \lambda A$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $A \neq 0$.

Soit $\varphi \in \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)$ définie par $\varphi(M) = MB - BM$.

Alors $\lambda A = AB - BA$, s'exprime par $\varphi(A) = \lambda A$.

Il vient alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(A^k) = k\lambda A^k$.

Preuve par récurrence.

En effet, $\varphi(A^{k+1}) = A^k(AB) - BA^{k+1} = A^k(BA + C) - (BA^k)A$, donc

$AB=BA+C$ par définition de C.

$$\varphi(A^{k+1}) = (A^kB - BA^k)A + A^kC = \varphi(A^k)A + \lambda A^{k+1}$$

$C=\lambda A$.

Alors $\varphi(A^{k+1}) = (\lambda A^k)A + \lambda A^{k+1} = (k+1)\lambda A^{k+1}$.

Hypothède de récurrence : $\varphi(A^k)=k\lambda A^k$.

Considérons $\varphi_k = \varphi - \lambda k\,\mathrm{Id}$.

Pour exploiter $\varphi(A^k)-\lambda kA^k$.

Il existe k_0 tel que φ_{k_0} est bijective.

Alors $\varphi_{k_0}(A^{k_0}) = 0$ implique $A^{k_0} = 0$ et A est nilpotente.

$\det \varphi_k$ est un polynôme en k de degré au plus n et n'admet donc qu'un nombre fini de valeurs d'annulation.

Commentaires

Si $\lambda=0$ ou $A=0$, alors $C=0$.

Copyright National

Exercices

Niveau 1

Ex. 1

Existe-t-il des matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?

Donner un exemple d'endomorphismes f et g de $E = \mathbb{K}[X]$ tels que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Ex. 2

Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Ex. 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 8 \\ 3 & -3 & 12 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ sont-elles des matrices semblables ?

Ex. 4

Montrer que, quelle que soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, les matrices A et ${}^tA$ sont semblables.

Ex. 5

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie tel que $f^2 = \lambda f$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Comparer $\mathrm{Tr}\, f$ et $\mathrm{rg}\, f$.

Ex. 6

Soit $(X_1, \ldots, X_q)$ et $(Y_1, \ldots, Y_p)$ des familles libres dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer que la famille $(Y_i\, {}^tX_j)_{(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]}$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Niveau 2

Ex. 7

Montrer que deux matrices idempotentes sont semblables si et seulement si elles ont le même rang.

Ex. 8

Soit $G \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un groupe multiplicatif. Montrer que tous les éléments de G ont le même rang.

Ex. 9

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\mathrm{rg}\, B = 1$.

Montrer que $A + B$ est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(BA^{-1}) \neq -1$.

Ex. 10

Soit A, B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ idempotentes.

Montrer que, si $S = A + \sqrt{2}B + \sqrt{3}C$ est idempotente, alors $B = C = 0$.

Ex. 11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = A$.

Montrer que la trace de l'endomorphisme ψ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\psi(M) = AM + MA$ est égale à $2n\, \mathrm{rg}\, A$.

Ex. 12

Soit p une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que, pour tout $t \in [0, 1]$, $p(t)$ est une matrice idempotente.

Montrer que $\varphi : t \mapsto \mathrm{rg}\big(p(t)\big)$ est constante.

Ex. 13

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de $\mathrm{GL}_n(E)$.

Montrer que le sous-espace des vecteurs invariants par tous les éléments de G a pour dimension $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{g \in G} \mathrm{Tr}\, g$.

Copyrighted material

Niveau 3

Ex. 14

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1) Calculer le rang de M en fonction de A et B.

2) Calculer M^{-1} quand elle existe.

Ex. 15

Soit f une application non constante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ telle que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$f(AB) = f(A)\,f(B) \quad \textbf{(1)}$$

Montrer que : $f(A) = 0 \iff (A \text{ est inversible})$

Ex. 16

On donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Expliciter $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ X \mapsto \mathrm{Tr}(AX)$.

2) Montrer que, pour tout élément φ du dual $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que φ soit l'application $X \mapsto \mathrm{Tr}(AX)$.

3) Caractériser les formes linéaires g sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ g(XY) = g(YX)$$

4) Montrer que, dans tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice inversible.

Ex. 17

Étant donné n et p entiers naturels non nuls, on considère une famille $(A_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ deux à deux distincts et telle que $\{A_1, \ldots, A_p\}$ soit stable pour la multiplication.

Montrer que la trace de $\sum_{k=1}^{p} A_k$ est un entier naturel multiple de p.

Avec éléments de solution

Ex. 18

Étant donné A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, résoudre l'équation

$$X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ X + (\mathrm{Tr}\,X)A = B.$$

Ex. 19

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que si $\sum_{M \in G} \mathrm{Tr}\,M = 0$, alors $\sum_{M \in G} M = 0$.

Ex. 20

Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le sous-ensemble des matrices A telles que $A^2 = 0$.

Déterminer le nombre de classes d'équivalence, pour la relation de similitude, contenues dans $\mathcal{D}$.

Indications

Ex. 7

A et B sont des matrices de projecteurs p et q. Utiliser des bases U et V adaptées à ces projecteurs.

Ex. 8

Il n'est pas dit que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. En particulier, l'élément neutre J de G n'est pas supposé être I_n. Comparer le rang de $A \in G$ à celui de J.

Ex. 9

$A + B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ équivaut à $(A + B)A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Utiliser les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés à A et B.

Ex. 10

La trace d'un projecteur est un entier naturel.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ sont des irrationnels.

Ex. 11

Calculer $\psi(E_{ij})$ pour les matrices élémentaires, qui forment la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On pourra se reporter à l'exemple 4 du cours. Toutefois, le résultat alors donné ne préjuge pas $A^2 = A$.

Ex. 12

p est continue signifie que les n^2 termes de $p(t)$ sont des fonctions continues de t.

Copyrighted material

Ex. 13

Vérifier que $p = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} g$ est un projecteur.

Ex. 14

1) $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-A \end{pmatrix}$

2) Si M est inversible, écrire le système $MX = Y$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

Ex. 15

- Si $\operatorname{rg} A = r \in [\![1, n-1]\!]$, et si K_r est une matrice nilpotente de rang r, il existe P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PK_rQ$.

Ex. 16

4) A étant de rang r, il existe P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex. 17

Avec $A = \sum_{k=1}^{p} A_k$, comparer A^2 et A.

Exploiter, pour $k \in [\![1, p]\!]$, l'application $A_l \mapsto A_lA_k$.

Ex. 18

$h : M \mapsto (\operatorname{Tr} a)M$ et $f = \mathrm{Id} + h$, monter que f est inversible lorsque $\operatorname{Tr} A \neq -1$.

Ex. 19

On peut s'inspirer de l'exercice 13.

Ex. 20

Pour $A \in \mathbb{D}$, justifier que $\operatorname{rg} A$ est au plus égal à la partie entière de $\frac{n}{2}$.

Dans $\mathbb{D}$, des matrices sont semblables si et seulement si elles ont le même rang.

Copyrighted material

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

1) On a, pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$, donc $\operatorname{Tr}(AB - BA) = 0$, alors que $\operatorname{Tr} I_n = n$.
La réponse est donc : non.

2) On vient de montrer que, si E est de dimension finie, il n'y a pas d'endomorphismes f et g qui vérifient $f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Dans $\mathbb{K}[X]$, soit $f : P \mapsto P'$ et $g : P \mapsto XP$.
Avec $f \circ g(P) = (XP)' = P + XP'$ et $g \circ f = XP'$, il vient $\big(f \circ g - g \circ f\big)(P) = P$, donc $f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Ex. 2

Le problème revient à trouver $P = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $PB = AP$.

Avec $PB = \begin{pmatrix} -z & x+6z \\ -t & y+6t \end{pmatrix}$ et $AP = \begin{pmatrix} 3x+2y & 3z+2t \\ 4x+3y & 4z+3t \end{pmatrix}$, on obtient un système de quatre équations

$3x + 2y + z = 0$, $x + 3z - 2t = 0$, $4x + 3y + t = 0$, $y - 4z + 3t = 0$, qui a pour solutions

$(x, y, z, t) = (-3z + 2t, 4z - 3t, z, t)$. Par exemple, $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, de déterminant -2, vérifie $PB = AP$.

Ex. 3

Si des matrices sont semblables, elles ont nécessairement même trace, même rang et même déterminant.
S'il est vrai que $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B$ (elles ont la même diagonale), le rang de A est égal à 1, alors que celui de B est égal à 3.
A et B ne sont donc pas semblables.

Ex. 4

Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est symétrique, alors A et ${}^tA$ sont évidemment semblables (réflexivité de la similitude).

On peut alors supposer $b \neq c$. une matrice $P = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ vérifie $PA = {}^tAP$ si et seulement si

$$\begin{cases} b(y-z) = 0 \\ c(y-z) = 0 \\ cx + (d-a)y - bt = 0 \\ bt + (a-d)z - cx = 0 \end{cases}$$

Compte tenu de $b \neq c$, les deux premières conditions équivalent à $y = z$.

Avec cela, les deux autres conditions sont les mêmes.

Si $b \neq 0$, une solution est (avec $x = 0$) $P = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & d-a \end{pmatrix}$. Si $c \neq 0$, une solution est (avec $t = 0$) $P = \begin{pmatrix} a-d & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$.

Ex. 5

En posant $p = \dfrac{1}{\lambda} f$, la propriété $f^2 = \lambda f$ équivaut à $p^2 = p$.

Il s'ensuit $\operatorname{rg} p = \operatorname{Tr} p$ (propriété utile d'un projecteur). Avec $\operatorname{rg} p = \operatorname{rg} f$ et $\operatorname{Tr} p = \dfrac{1}{\lambda} \operatorname{Tr} f$, il vient $\operatorname{Tr} f = \lambda \operatorname{rg} f$.

Ex. 6

Notons que $1 \leqslant p \leqslant n$ et $1 \leqslant q \leqslant n$. On complète les familles libres $(X_1, \ldots, X_q)$ et $(Y_1, \ldots, Y_p)$ en des bases $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soit A et B les éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les X_j pour A et les Y_i pour B.

On notant $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a $Y_i = BE_i$ et $X_j = AE_j$, d'où $Y_i\,{}^tX_j = B(E_i\,{}^tE_j){}^tA$,

c'est-à-dire $Y_i\,{}^tX_j = BE_{ij}\,{}^tA$ où les E_{ij} sont les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Comme A et B sont inversibles, $\varphi : M \mapsto BM{}^tA$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les images par φ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en constituent une base.

Extraite d'une famille libre, la famille $(Y_i\,{}^tX_j)_{(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]}$ est libre.

Copyrighted material

Niveau 2

Ex. 7

A et B telles que $A^2 = A$ et $B^2 = B$ sont, dans la base canonique B de $\mathbb{K}^n$, des matrices de projecteurs p et q.

Il existe des bases U et V de $\mathbb{K}^n$ dans lesquelles les matrices de p et q sont respectivement $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_{r'} = \begin{pmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où r et r' sont les rangs de p et q, c'est-à-dire ceux de A et B.

On en déduit que si A et B ont même rang, elles sont semblables à une même matrice J_r, donc elles sont semblables. La réciproque est immédiate.

Ex. 8

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A (A matrice de f_A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$).

Soit J l'élément neutre du groupe multiplicatif G : $\forall A \in G$, $AJ = JA = A$.

Cela équivaut à $f_J \circ f_A = f_A \circ f_J = f_A$. La relation $f_A \circ f_J = f_A$ donne $\operatorname{Ker} f_J \subset \operatorname{Ker} f_A$.

Soit $B \in G$ tel que $AB = BA = J$ (inverse de A dans G) : $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A = f_J$.

La relation $f_B \circ f_A = f_J$ donne $\operatorname{Ker} f_A \subset f_J$. Finalement, il vient $\operatorname{Ker} f_A = \operatorname{Ker} f_J$.

Alors (théorème du rang) : $\operatorname{rg} f_A = \operatorname{rg} f_J$. En conclusion, pour tout $A \in G$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} J$.

Ex. 9

Soit f et g les endomorphismes de $E = \mathbb{K}^n$ canoniquement associés à A et B.

Avec $f \in \mathrm{GL}(E)$, on a $f + g \in \mathrm{GL}(E) \iff (f + g) \circ f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$, c'est-à-dire $g \circ f^{-1} + \mathrm{Id}_E \in \mathrm{GL}(E)$.

Avec $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{rg}(BA^{-1}) = \operatorname{rg} B = 1$, donc le noyau de $g \circ f^{-1}$ est de dimension $n - 1$.

On complète une base de $\operatorname{Ker}(g \circ f^{-1})$ en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ de E.

Dans $\mathcal{B}$, la matrice de $g \circ f^{-1}$ est de la forme $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. On a $\operatorname{Tr} BA^{-1} = \operatorname{Tr} C = \lambda_n$.

La matrice de $g \circ f^{-1} + \mathrm{Id}_E$ est triangulaire supérieure, de diagonale $(1, 1, \ldots, 1, 1 + \lambda_n)$. Elle est inversible si et seulement si $\lambda_n + 1 \neq 0$.

Finalement, $A + B$ inversible si et seulement si $\lambda_n \neq -1$, c'est-à-dire $\operatorname{Tr}(BA^{-1}) \neq -1$.

Ex. 10

On a $\operatorname{Tr} S = \operatorname{Tr} A + \sqrt{2} \operatorname{Tr} B + \sqrt{3} \operatorname{Tr} C$.

A, B et C étant idempotentes, leurs traces sont des entiers naturels.

Si S est idempotente, donc de trace dans $\mathbb{N}$, l'égalité $(\operatorname{Tr} A - \operatorname{Tr} S) + \sqrt{2} \operatorname{Tr} B + \sqrt{3} \operatorname{Tr} C = 0$ signifie que $(\operatorname{Tr} A - \operatorname{Tr} S, \operatorname{Tr} B, \operatorname{Tr} C)$ est solution de l'équation $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, $x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3} = 0$.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ étant irrationnels, $y\sqrt{2} + z\sqrt{3}$, avec $(y, z) \in \mathbb{Q}^2$, n'est rationnel que si $y = z = 0$.

B et C étant idempotentes, on a aussi $\operatorname{rg} B = \operatorname{Tr} B$ et $\operatorname{rg} C = \operatorname{Tr} C$. Alors $\operatorname{Tr} B = \operatorname{Tr} C = 0$ implique $B = C = 0$.

Ex. 11

Soit E_{ij} une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de terme général $\delta_{ik}\delta_{jl}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant l \leqslant n$ (symbole de Kronecker).

Avec $A = [a_{ij}]$, on a $AE_{ij} = \sum_{k,l} a_{kl} E_{kl} E_{ij}$, et on sait que $E_{kl}E_{ij} = \delta_{li} E_{kj}$.

Alors $AE_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} E_{kj}$, de coordonnée a_{ii} sur E_{ij}. De même, la coordonnée sur E_{ij} de $E_{ij}A$ est a_{jj}.

Ainsi, la coordonnée sur E_{ij} de $\psi(E_{ij})$ est $a_{ii} + a_{jj}$. Alors, il s'ensuit $\operatorname{Tr} \psi = \sum_{i,j} (a_{ii} + a_{jj}) = 2n \operatorname{Tr} A$.

Comme A est idempotente, la relation $\operatorname{Tr} A = \operatorname{rg} A$ donne le résultat.

Copyrighted material

Ex. 12

Comme $p(t)$ est idempotente, on a $\operatorname{rg}\big(p(t)\big) = \operatorname{Tr}\big(p(t)\big)$.

L'application $\varphi : t \mapsto \operatorname{Tr}\big(p(t)\big)$ est continue (somme de fonctions continues).

Comme elle est à valeurs entières, elle est constante (théorème des valeurs intermédiaires).

Ex. 13

Posons $p = \dfrac{1}{n}\sum_{g\in G} g$. Pour tout $h \in G$, on a $h \circ p = \dfrac{1}{n}\sum_{g\in G} h\circ g$.

Or $g \mapsto h \circ g$ est une bijection du groupe fini G. Il s'ensuit $h \circ p = p$.

Alors $p \circ p = \dfrac{1}{n}\Big(\sum_{h\in G} h\Big)\circ p = \dfrac{1}{n}\sum_{h\in G} h\circ p = p$, donc $\operatorname{Tr} p = \operatorname{rg} p$ (propriété utile pour un projecteur).

Il vient alors $\dfrac{1}{n}\sum_{g\in G}\operatorname{Tr} g = \operatorname{Tr} p = \operatorname{rg} p$. Comme l'image d'un projecteur est aussi le sous-espace des vecteurs invariants, on a $\operatorname{rg} p = \dim\big(\operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)\big)$.

Avec $p - \mathrm{Id}_E = \dfrac{1}{n}\sum_{g\in G}(g - \mathrm{Id}_E)$, il vient $\bigcap_{g\in G}\operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.

Réciproquement, pour tout $g\in G$, $g\circ p = p$ donne $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$ donc $\operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Im} p \subset \bigcap_{g\in G}\operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$.

Ainsi $\operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = \bigcap_{g\in G}\operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$ donc $\dim\Big(\bigcap_{g\in G}\operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)\Big) = \dfrac{1}{n}\sum_{g\in G}\operatorname{Tr} g$.

Niveau 3

Ex. 14

1) a) Par transformations élémentaires sur les colonnes : $C_{n+j} \longleftarrow C_{n+j} - C_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$ (où C_k est la $k^{\text{ème}}$ colonne de M), on ne change pas le rang de M. Donc $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} M_1$ avec $M_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A & B-A \end{bmatrix}$.

De même, par transformations élémentaires sur les lignes : $L_{n+j} \longleftarrow L_{n+j} - L_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, on obtient :

$$\operatorname{rg} M_1 = \operatorname{rg} M_2 \quad \text{avec} \quad M_2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-A \end{pmatrix}$$

Remarque Les deux affirmations précédentes peuvent aussi se déduire des identités matricielles :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ A & B-A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ A & B-A \end{pmatrix}$$

en notant que les deux matrices $\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$ sont évidemment inversibles.

b) On montre facilement que le rang de M_2 est égal à $\operatorname{rg} A + \operatorname{rg}(B - A)$.

Par exemple, en posant $\operatorname{rg} A = r$ et $\operatorname{rg}(B - A) = s$, on sait qu'il existe P_1, Q_1 et P_2, Q_2 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$:

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r \quad \text{et} \quad P_2(B-A)Q = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_s$$

d'où

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_s \end{pmatrix}$$

et puisque les matrices $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$ sont inversibles, on a : $\operatorname{rg} M_2 = r + s$.

En conclusion $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg}(B - A)$

Copyrighted material

2) On a $\operatorname{rg} A \leqslant n$ et $\operatorname{rg}(B-A) \leqslant n$ donc : $\operatorname{rg} M = 2n \iff \big(\operatorname{rg} A = n \text{ et } \operatorname{rg}(B-A) = n\big)$.
Ainsi M est inversible si et seulement si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et il existe $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = A + D$.
Dans ces conditions, pour X_1, X_2, Y_1, Y_2 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a :

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A(X_1+X_2) = Y_1 \\ AX_1 + BX_2 = Y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} A(X_1+X_2) = Y_1 \\ DX_2 = Y_2 - Y_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X_1 = (A^{-1}+D^{-1})Y_1 - D^{-1}Y_2 \\ X_2 = D^{-1}Y_2 - D^{-1}Y_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}+D^{-1} & -D^{-1} \\ -D^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

On en déduit $\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}+(B-A)^{-1} & -(B-A)^{-1} \\ -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{pmatrix}$.

Ex. 15

1) Supposons $f(A) = 0$.
Si A était inversible, pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pourrait écrire $B = AA^{-1}B$ et on aurait donc :

$$f(B) = f(A)\,f\left(A^{-1}B\right) = 0$$

f serait constante, nulle. Ce cas étant à rejeter par hypothèse, on en déduit que $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Remarque L'implication ainsi démontrée donne par contraposition :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \;\Rightarrow\; f(A) \neq 0$$

2) Supposons que $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

a) Un premier cas est $A = 0$.

(1) donne alors $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(0)\big(1 - f(B)\big) = 0$ donc $f(0) = 0$ sinon f serait constante égale à 1, ce qui est exclu par hypothèse.

b) Le cas général est $\operatorname{rg} A = r$ avec $1 \leqslant r \leqslant n-1$.

Par permutation des colonnes, $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se transforme en : $K_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

A et K_r étant le même rang, il existe P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que : $A = PK_rQ$.
D'après **(1)** on a alors $f(A) = f(P)f(Q)f(K_r)$.
La matrice K_r est nilpotente car triangulaire supérieure stricte donc $K_r^n = 0$.
Avec **(1)** et le a), il vient alors : $f\left(K_r^n\right) = f(K_r)^n = 0$ donc $f(K_r) = 0$ et finalement $f(A) = 0$.

Ex. 16

Soit $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Pour $X = [x_{ij}]$ posons $AX = Y$, $Y = [y_{ij}]$.
Alors, pour tout $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $y_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{jk}$ donc $\operatorname{Tr}(AX) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ji}$.

2) Soit $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (matrices élémentaires).
Étant donné $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$, pour tout $X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}E_{ij}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a : $\varphi(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi(E_{ij})x_{ij}$
donc, d'après 1), $\varphi(X) = \operatorname{Tr}(AX)$ où A est la matrice de terme général $a_{ij} = \varphi(E_{ji})$.

Copyrighted material

L'application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ qui, à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, associe la forme linéaire $\varphi_A : X \mapsto \mathrm{Tr}(AX)$ est évidemment linéaire et ce qui précède montre qu'elle est surjective.

Puisque $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^* = n^2$, on en déduit que Φ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$.

Finalement, pour tout $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$, il existe une unique matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\Phi(A) = \varphi \quad \text{c'est-à-dire telle que} \quad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \varphi(X) = \mathrm{Tr}(AX)$$

3) Soit $g \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ telle que $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ g(XY) = g(YX)$.

D'après le 2), il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ g(X) = \mathrm{Tr}(AX)$ donc :

$$\text{pour tout } (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ \mathrm{Tr}(AXY) = \mathrm{Tr}(AYX) \qquad (1)$$

Sachant que $E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell}$ (δ_{jk} : symbole de Kronecker), on obtient :

$$A\,E_{k\ell} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}E_{k\ell} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}E_{i\ell} \quad \text{donc} \quad \mathrm{Tr}(A\,E_{k\ell}) = a_{\ell k}$$

Alors, avec $i \neq j$, $X = E_{ik}$ et $Y = E_{kj}$, la relation **(1)** donne $\mathrm{Tr}(A\,E_{ij}) = 0$ donc $a_{ji} = 0$

puis, avec $X = E_{ij}$ et $Y = E_{ji}$, la relation **(1)** donne : $\mathrm{Tr}(A\,E_{ii}) = \mathrm{Tr}(A\,E_{jj})$ donc $a_{ii} = a_{jj}$

En conséquence, A est une matrice scalaire : $A = \lambda I_n$ et g est définie par : $g(X) = \lambda\,\mathrm{Tr}\,X$ donc $g = \lambda\,\mathrm{Tr}$

Inversement, on sait que, pour tout couple (X, Y) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$, donc une forme linéaire $g \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ vérifie $g(XY) = g(YX)$ pour tout (X, Y) si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $g = \lambda\,\mathrm{Tr}$.

4) Tout hyperplan H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Il existe donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \neq 0$, telle que, pour tout X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on ait : $X \in H \iff \mathrm{Tr}(AX) = 0$.

Posons $r = \mathrm{rg}\,A$, on sait qu'il existe P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que : $A = P\,J_r\,Q$ avec $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $A \neq 0$ équivaut à $r \geqslant 1$.

On a alors, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(P\,J_r\,Q\,X) = \mathrm{Tr}(J_r\,Q\,X\,P)$.

En considérant, par exemple, la matrice de permutation :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{on a} \quad J_rU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } r < n$$

et $J_nU = I_nU = U$ donc, dans tous les cas $\mathrm{Tr}(J_rU) = 0$, or $U = QVP$ avec $V = Q^{-1}UP^{-1}$ donc $\mathrm{Tr}(AV) = \mathrm{Tr}(J_rU) = 0$ et V, qui est inversible, appartient à H.

Ex. 17

Pour i, j et k dans $[\![\,1, p\,]\!]$, $A_iA_k = A_jA_k$ implique $A_i = A_j$ puisque A_k est inversible.

Ainsi $\varphi_k : A_i \mapsto A_iA_k$ est une application injective.

La stabilité de $U = \{A_1, \dots, A_p\}$ pour la multiplication montre que $\varphi_k(U) \subset U$.

Il s'ensuit que φ_k est une permutation de U et on a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} A_i = \sum_{i=1}^{p} A_iA_k = \Big(\sum_{i=1}^{p} A_i\Big)A_k$.

En posant $\displaystyle A = \sum_{i=1}^{p} A_i$, ceci nous donne $A = AA_k$ pour tout $k \in [\![\,1, p\,]\!]$ et il s'ensuit que :

$$A^2 = A\Big(\sum_{k=1}^{p} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{p} AA_k = pA, \text{ soit } \Big(\frac{1}{p}A\Big)^2 = \frac{1}{p}A.$$

La trace de $\frac{1}{p}A$ est donc égale à son rang et c'est ainsi un entier naturel. Finalement $\mathrm{Tr}\,A = p\,\mathrm{Tr}\Big(\frac{1}{p}A\Big)$ est un entier naturel multiple de p.

Copyrighted material

Ex. 18

Soit $h : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M \mapsto (\operatorname{Tr} M)A$. Alors $h^2 = (\operatorname{Tr} A)h$, et avec $f = \mathrm{Id}_E + h$, il vient

$$f^2 - (2 + \operatorname{Tr} A)f + (1 + \operatorname{Tr} A)\,\mathrm{Id}_E = 0.$$

Si $\operatorname{Tr} A \neq -1$, alors f est bijective, d'inverse $f^{-1} = \dfrac{1}{1+\operatorname{Tr} A}\left((2+\operatorname{Tr} A)\,\mathrm{Id}_E - f\right)$, soit $f^{-1} = \mathrm{Id}_E - \dfrac{1}{1+\operatorname{Tr} A}\,h$,

donc $f(X) = B$ admet pour solution unique $X = B - \dfrac{\operatorname{Tr} B}{1+\operatorname{Tr} A}\,A$.

Si $\operatorname{Tr} A = -1$, alors $f^2 = f$ et f est un projecteur de noyau $\{X.\ (\operatorname{Tr} X)A = -X\}$ donc $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}A$.

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Inv} f = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Ker} h = \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$. Ainsi :

si $\operatorname{Tr} B \neq 0$, l'équation n'a pas de solution et,

si $\operatorname{Tr} B = 0$, l'ensemble des solutions est $B + \mathbb{R}A$.

Ex. 19

On notant $m = \operatorname{Card} G$, on pose $P = \dfrac{1}{m}\sum_{M\in G} M$. On obtient $P^2 = P$.

Alors $\operatorname{rg} P = \operatorname{Tr} P = \dfrac{1}{m}\sum_{M\in G} \operatorname{Tr} M$. Il s'ensuit $\operatorname{rg} P = 0$, c'est-à-dire que $\sum_{M\in G} M = 0$.

Ex. 20

1) Soit $A \in \mathcal{D}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. Notons $r = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u$.

$u^2 = 0$ équivaut à $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, ce qui implique $r \leqslant n - r$, soit $r \leqslant \dfrac{n}{2}$ ou $r \leqslant n'$, avec n' partie entière de $\dfrac{n}{2}$.

Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base d'un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$.

$\big(u(e_1), \ldots, u(e_r)\big)$ est une famille libre d'éléments qui sont encore dans $\operatorname{Ker} u$.

On la complète par $(e_{r+1}, \ldots, e_{n-r})$ pour obtenir une base de $\operatorname{Ker} u$.

Dans la base $\big(u(e_1), \ldots, u(e_r), e_{r+1}, \ldots, e_{n-r}, e_1, \ldots, e_r\big)$, la matrice de u est $J_r = \begin{pmatrix} (0) & I_r \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$.

2) Toute matrice semblable à une matrice de carré nul est elle-même de carré nul, donc $\mathcal{D}$ est une réunion de classes de similitude.

Deux matrices de $\mathcal{D}$ de même rang r sont semblables, puisque semblables à J_r, et deux matrices semblables ont le même rang.

Pour tout $r \in [\![\, 0, n' \,]\!]$, la matrice J_r est de rang r et de carré nul. Il y a donc $1 + n'$ classes de similitude.

Copyrighted material

CHAPITRE 3

Déterminants

A. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ 94
1. Groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$ 94
2. Transpositions et cycles 95
3. Décomposition en produit de transpositions 97
4. Signature d'une permutation 97

B. Applications p-linéaires 99
1. Applications multilinéaires 99
2. Applications p-linéaires symétriques, antisymétriques ou alternées 100

C. Formes n-linéaires alternées. Déterminant dans une base 101
1. Développement suivant une base 101
2. Ensemble des formes n-linéaires alternées 103
3. Propriétés d'un déterminant 104
4. Changement de base, famille libre 105

D. Déterminant d'un endomorphisme 106

E. Déterminant d'une matrice carrée 107
1. Définition 107
2. Propriétés 107
3. Matrices triangulaires ou triangulaires par blocs 108
4. Deux déterminants classiques 109

F. Développement d'un déterminant suivant une colonne ou une ligne . . . 111
1. Cofacteurs 111
2. Comatrice 112
3. Mineurs et calcul des cofacteurs 113

G. Systèmes linéaires de Cramer 115
1. Notations 115
2. Formules de Cramer 115

Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre 116

Énoncés des exercices 129

Solutions des exercices 134

Copyrighted material

A. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$

1. Groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$

Définition 1

Une **permutation** d'un ensemble E est une bijection de E sur lui-même.
L'ensemble des permutations de E est noté $\mathfrak{S}(E)$.

Définition 2

Étant donné $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$, on appelle **support** de cette permutation l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas invariants par σ. On le note $\text{Supp}(\sigma)$:

$$\text{Supp}(\sigma) = \{x \in E \,/\, \sigma(x) \neq x\}$$

Propriété 1

Si E est un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ est un groupe d'ordre $n!$. (1)

(1) L'**ordre** d'un groupe fini est le nombre d'éléments ou cardinal de ce groupe.

☞ $\mathfrak{S}(E)$ n'est pas vide ; il contient par exemple Id_E.
La composée de bijections est une bijection. La composition des applications est associative.
Une bijection de E dans E admet une réciproque qui est aussi une bijection de E dans E.
D'autre part, le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n est $n!$ (voir Algèbre-Géométrie PCSI ou MPSI, chapitre 2, Dénombrements).

Définition 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}_n = [\![1, n]\!]$.
Le **groupe symétrique d'ordre** n est le groupe $(\mathfrak{S}(\mathbb{N}_n), \circ)$ des permutations de $[\![1, n]\!]$.
On le note $\mathfrak{S}_n$.

Notation 1

Soit $E = a_1, a_2, \ldots, a_n$ un ensemble de cardinal n. Un élément σ de $\mathfrak{S}(E)$ se représente par le tableau : $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \ldots & \sigma(a_n) \end{pmatrix}$. (2)

(2) Chaque élément de E figure une fois et une seule sur la deuxième ligne.

Exemple 1 Dans $\mathfrak{S}_3$, étude de l'inverse, des itérées et de la composée des permutations :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

On obtient σ_1^{-1} et σ_2^{-1} par lecture inverse des tableaux définissant σ_1 et σ_2.

Par exemple $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ donne $\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ soit, en réordonnant la première ligne : $\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. On constate aussi que $\sigma_2^{-1} = \sigma_2$.

Par définition de σ_1, on a $\sigma_1(1) = 3$, et $\sigma_1(3) = 2$, donc $\sigma_1^2(1) = \sigma_1\left(\sigma_1(1)\right) = 2$.

On forme ainsi le tableau représentatif de σ_1^2 puis celui de $\sigma_1^3 = \sigma_1 \circ \sigma_1^2$:

$$\sigma_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On obtient de même : $\sigma_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Les calculs précédents donnent $\sigma_1^3 = \text{Id}$ et $\sigma_2^2 = \text{Id}$ d'où $\sigma_1^{-1} = \sigma_1^2$ et $\sigma_2^{-1} = \sigma_2$.

Comme ci-dessus, on obtient : $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ainsi on a $\sigma_1 \circ \sigma_2 \neq \sigma_2 \circ \sigma_1$, le groupe $\mathfrak{S}_3$ n'est donc pas commutatif.

Copyrighted material

2. Transpositions et cycles

2.1 – Transpositions

Définition 4

Une **transposition** est une permutation qui échange deux éléments distincts de $[\![1, n]\!]$ et laisse les autres invariants. (3)

(3) Une transposition est une involution.

Soit i et j distincts dans $[\![1, n]\!]$. La transposition τ qui échange i et j est notée τ_{ij}. (4)

(4) On la note aussi $(i\ j)$.

Il y a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ paires $\{i, j\}$ dans $[\![1, n]\!]$, donc $\mathfrak{S}_n$ contient $\dfrac{n(n-1)}{2}$ transpositions.

Exemple 2 La composée de deux transpositions n'est pas toujours une transposition.

Il existe des involutions de $[\![1, n]\!]$ qui ne sont pas des transpositions.

Dans $\mathfrak{S}_n$, $n \geqslant 4$, considérons les transpositions $\tau = (1\ 2)$ et $\tau' = (3\ 4)$.

Une transposition a $n-2$ éléments invariants et $\sigma = \tau \circ \tau'$ en a $n-4$ donc σ n'est pas une transposition.

En outre, on vérifie aisément que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$.

2.2 – Permutations circulaires

Soit E un ensemble fini, de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 5

On dit que $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$ est une **permutation circulaire** quand il existe $a \in E$ tel que :

$$\left\{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \ldots, \sigma^{n-1}(a)\right\} = E.$$

Conséquence

Les $\sigma^i(a)$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, sont deux à deux distincts.

Propriété 2

Si σ est une permutation circulaire de E, alors :

$$\forall x \in E,\ \left\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^{n-1}(x)\right\} = E.$$

☞ On considère une permutation circulaire $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$.

a) Soit $a \in E$ tel que $\left\{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \ldots, \sigma^{n-1}(a)\right\} = E$. Alors $\sigma^n(a) = a$.

En effet, on a $\sigma(E) = E$, car σ est une bijection de E.

Avec $\sigma(E) = \left\{\sigma(a), \sigma^2(a), \ldots, \sigma^{n-1}(a), \sigma^n(a)\right\}$, il vient : $a \in \{\sigma^i(a) / 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

En conséquence de la définition, on a $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $a \neq \sigma^i(a)$. Par suite, $a = \sigma^n(a)$.

b) Il résulte du a) que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\sigma^{n+k}(a) = \sigma^k(a)$.

c) Pour $x \in E$, il existe $p \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x = \sigma^p(a)$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a donc $\sigma^k(x) = \sigma^{p+k}(a)$. Il s'ensuit que :

$$\left\{x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{n-1}(x)\right\} = \left\{\sigma^p(a), \sigma^{p+1}(a), \ldots, \sigma^{n+p-1}(a)\right\}.$$

or, d'après b) :

$$\left\{\sigma^p(a), \sigma^{p+1}(a), \ldots, \sigma^{n-1+p}(a)\right\} = \left\{\sigma^p(a), \ldots, \sigma^{n-1}(a), a, \sigma(a), \ldots, \sigma^{p-1}(a)\right\}$$

d'où finalement $\left\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^{n-1}(x)\right\} = E$.

Notation 2

Si $\sigma \in E$ est une permutation circulaire, on la note :

$$\sigma = \begin{pmatrix} x & \sigma(x) & \sigma^2(x) & \ldots & \sigma^{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

où x est un élément quelconque de E.

Copyrighted material

2.3 – Cycles

Propriété 3

Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$. Si $I \subset [\![1, n]\!]$ est inclus dans l'ensemble des éléments invariants par σ, alors σ induit une permutation de $J = [\![1, n]\!] \setminus I$. On la note σ_J. ✎ (5)

✎ (5) En particulier, toute permutation de $[\![1, n]\!]$ induit une permutation de son support.

Définition 6

On dit que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, de support J, est un **cycle** si σ_J est une permutation circulaire de J.

Si σ est un cycle, de support J, $\mathrm{Card}(J)$ est appelé **longueur** de ce cycle. ✎ (6)

✎ (6) On convient que Id est un cycle, de longueur 0.

Notation 3

Le cycle σ de support J est noté : $\sigma = \left(x\ \sigma(x)\ \cdots\ \sigma^{p-1}(x)\right)$ où x est un élément quelconque de J et $p = \mathrm{Card}(J)$.

Cas particuliers

Soit σ un cycle. Si $\mathrm{Inv}(\sigma) = \emptyset$, alors σ est une permutation circulaire de $[\![1, n]\!]$.

Toute transposition est un cycle, de longueur 2.

Pour $n > 1$, il n'y a pas de cycle de longueur 1.

Exemple 3 Vérifier que $\sigma \in \mathfrak{S}_{12}$ est un cycle et préciser son support :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 5 & 11 & 4 & 3 & 6 & 2 & 8 & 12 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des invariants de σ est $I = \{1, 4, 6, 8, 10\}$ d'où le support :

$$J = \mathbb{N}_{12} \setminus I = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 12\}$$

On voit alors que :

$$\sigma(2) = 5\ ,\ \sigma(5) = 3\ ,\ \sigma(3) = 11\ ,\ \sigma(11) = 9\ ,\ \sigma(9) = 12\ ,\ \sigma(12) = 7\ ,\ \sigma(7) = 2$$

donc σ est le cycle $(2\,5\,3\,11\,9\,12\,7)$.

Exemple 4 Deux cycles de supports disjoints commutent.

On considère σ et σ' des cycles de supports S et S' tels que $S \cap S' = \emptyset$.

- Soit $x \notin S \cup S'$. Invariant par σ et par σ', x est invariant par $\sigma \circ \sigma'$ et par $\sigma' \circ \sigma$.
- Si $x \in S$, alors $x \notin S'$. x est invariant par σ' d'où $\sigma \circ \sigma'(x) = \sigma(x)$.

Par définition d'un cycle, pour $x \in S$, support de σ, on a $\sigma(x) \in S$.

Il s'ensuit que $\sigma(x) \notin S'$ d'où $\sigma' \circ \sigma(x) = \sigma(x)$, c'est-à-dire $\sigma' \circ \sigma(x) = \sigma \circ \sigma'(x)$.

On vérifie de même que $\sigma' \circ \sigma(x) = \sigma \circ \sigma'(x)$ pour tout $x \in S'$.

- En conclusion, $\sigma' \circ \sigma(x) = \sigma \circ \sigma'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{N}_n$ d'où $\sigma' \circ \sigma = \sigma \circ \sigma'$.

Exemple 5 Décomposition en produit de cycles disjoints la permutation σ de $\mathbb{N}_{10}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

On a $\sigma(1) = 3$, $\sigma(3) = 6$, $\sigma(6) = 1$. Soit σ_1 le cycle $(1\,3\,6)$

En prenant $2 \notin \{1, 3, 6\}$, on a $\sigma(2) = 10$, $\sigma(10) = 9$, $\sigma(9) = 8$, $\sigma(8) = 5$ et $\sigma(5) = 2$.

On forme le cycle $\sigma_2 = (2\ 10\ 9\ 8\ 5)$. Les derniers éléments 4 et 7 sont invariants par σ.

Il est aisé de vérifier que $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$.

En effet 4 et 7 sont invariants par σ_1 et par σ_2. Ils sont donc invariants par leur composé.

Pour les autres éléments, étudions par exemple les images de 3 et de 9 :

$\sigma_2(3) = 3$ et $\sigma_1(3) = 6$ donnent $\sigma_1 \circ \sigma_2(3) = 6 = \sigma(3)$.

$\sigma_2(9) = 8$ et $\sigma_1(8) = 8$ donnent $\sigma_1 \circ \sigma_2(9) = 8 = \sigma(9)$.

Copyrighted material

3. Décomposition en produit de transpositions

Théorème 1

Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ peut se décomposer en produit de transpositions. ✎ (7)

On dit que le groupe $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les $\dfrac{n(n-1)}{2}$ transpositions τ_{ij}.

✎ (7) C'est un théorème fondamental pour l'étude des permutations.

☞ L'identité sur $\mathbb{N}_n$ est la composée $\tau \circ \tau$, où τ est une transposition quelconque.

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. La propriété est vraie si $n = 2$. ✎ (8)

Supposons la vraie pour $n-1$, avec $n \geqslant 3$, et considérons $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

1) Si $\sigma(n) = n$, la restriction σ' de σ à $\mathbb{N}_{n-1}$ est une permutation de $\mathbb{N}_{n-1}$. Elle se décompose donc en produit de transpositions : $\sigma' = \tau'_1 \circ \tau'_2 \circ \cdots \circ \tau'_s$.

À toute transposition τ' de $\mathbb{N}_{n-1}$, associons la transposition τ de $\mathbb{N}_n$ telle que $\tau(n) = n$ et $\tau(k) = \tau'(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$. Il est alors immédiat que $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s$.

2) Si $\sigma(n) \neq n$, en introduisant la transposition $\tau = \tau_{n\sigma(n)}$, on voit que $\tau \circ \sigma$ laisse n invariant et on est ramené au cas précédent. ✎ (9)

En conséquence, $\tau \circ \sigma$ est produit de transpositions : $\tau \circ \sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_r$ et, avec $\tau^{-1} = \tau$, il vient $\sigma = \tau \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_r$.

✎ (8) Les permutations de $\mathbb{N}_2$ sont $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}_2}$ et τ_{12}.

✎ (9) Ce théorème fournit une méthode de décomposition.

Propriété 4

Un cycle $\sigma = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_{p-1}\ a_p)$ se décompose en produit de $p-1$ transpositions avec $\sigma = (a_1\ a_p) \circ (a_1\ a_{p-1}) \circ \cdots \circ (a_1\ a_2)$. ✎ (10)

✎ (10) Vérification aisée laissée au lecteur.

Exemple 6 Complétons l'exemple 5 précédent en donnant deux décompositions de σ en produit de transpositions.

- Commençons par décomposer de deux manières différentes chacun des cycles σ_1 et σ_2 en produit de transpositions.

Nous avons $\sigma_1 = (1\,3\,6) = (1\,6) \circ (1\,3)$ et $\sigma_2 = (2\,10\,9\,8\,5) = (2\,5) \circ (2\,8) \circ (2\,9) \circ (2\,10)$.

Avec $\sigma_1 = (3\,6\,1)$, nous avons aussi $\sigma_1 = (3\,1) \circ (3\,6)$.

Avec $\sigma_2 = (5\,2\,10\,9\,8) = (8\,5\,2\,10\,9)$, nous avons :

$\sigma_2 = (5\,8) \circ (5\,9) \circ (5\,10) \circ (5\,2)$ ou aussi $\sigma_2 = (8\,9) \circ (8\,10) \circ (8\,2) \circ (8\,5)$.

- Il vient alors $\sigma = (1\,6) \circ (1\,3) \circ (2\,5) \circ (2\,8) \circ (2\,9) \circ (2\,10)$ ou :

$\sigma = (3\,1) \circ (3\,6) \circ (8\,9) \circ (8\,10) \circ (8\,2) \circ (8\,5)$.

4. Signature d'une permutation

Définition 7

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Une paire $\{i, j\}$ est une **inversion** pour σ lorsque :

$$(i-j)(\sigma(i) - \sigma(j)) < 0$$

On note $\mathrm{Inv}(\sigma)$ le nombre d'inversions pour σ.

Définition 8

La **signature** d'une permutation σ est : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\mathrm{Inv}(\sigma)}$.

Une permutation est dite **paire** ou **impaire** selon que sa signature est 1 ou -1.

Propriété 5

Pour toute permutation σ, on a : $\displaystyle\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$.

Copyrighted material

Exemple 7 **Méthode pratique** de recherche du nombre d'inversions.

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Pour chacun des nombres de la deuxième ligne, on compte combien il y en a de plus petits écrits après lui.

La somme de ces nombres est le nombre d'inversions de la permutation.

Sur l'exemple donné,

terme étudié :	3	10	6	4	2	1	7	5	8	9
nombre associé :	2	8	4	2	1	0	1	0	0	0

La somme des nombres associés est 18, la permutation σ est donc paire.

Théorème 2

Pour toute transposition τ, $\varepsilon(\tau) = -1$. (11)

(11) Théorème fondamental pour déterminer une signature.

☞ Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i < j$.

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & k & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & j & \dots & k & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$$

En deuxième ligne, il y a $j - i$ termes plus petits que j, écrits après j.

Pour $i < k < j$, cet entier k se trouve en deuxième ligne avec i comme seul terme plus petit que lui et écrit après lui.

Le nombre d'inversions est donc $(j - i) + \big((j - 1) - i\big) = 2(j - i) - 1$.

Cet entier est impair, la transposition τ est donc impaire.

Théorème 3

L'application ε de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$, $\varepsilon : \sigma \to \varepsilon(\sigma)$ est un morphisme de groupes de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans le groupe multiplicatif $\big(\{-1, 1\}, \cdot\big)$: (12)

$$\forall (\sigma_1, \sigma_2),\ \varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\,\varepsilon(\sigma_2).$$

(12) Ce théorème est admis. Ce sont les éléments directeurs qui sont donnés en preuve.

☞ $$\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \frac{\displaystyle\prod_{i<j} \big(\sigma_1 \circ \sigma_2(i) - \sigma_1 \circ \sigma_2(j)\big)}{\displaystyle\prod_{i<j} \big(\sigma_2(i) - \sigma_2(j)\big)} \times \frac{\displaystyle\prod_{i<j} \big(\sigma_1(i) - \sigma_2(j)\big)}{\displaystyle\prod_{i<j} (i - j)}.$$

Comme σ_2 est une permutation de $\mathbb{N}_n$, et $\dfrac{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)}{i - j} = \dfrac{\sigma_2(j) - \sigma_2(i)}{j - i}$, on a

$$\frac{\displaystyle\prod_{i<j} \big(\sigma_1 \circ \sigma_2(i) - \sigma_1 \circ \sigma_2(j)\big)}{\displaystyle\prod_{i<j} \big(\sigma_2(i) - \sigma_2(j)\big)} = \varepsilon(\sigma_1).$$ Il vient alors $\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\,\varepsilon(\sigma_2)$.

Corollaire 1

La signature d'une transposition σ qui se décompose en produit de s transpositions est $(-1)^s$.

Corollaire 2

Si σ est un cycle de longueur p, sa signature est $(-1)^{p-1}$.

On utilise : $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_{p-1}\ a_p) = (a_1\ a_p) \circ (a_1\ a_{p-1}) \circ \cdots \circ (a_1\ a_2)$.

Exemple 8 Calcul de la signature de la permutation définie dans l'exemple 5.

Nous avons $\sigma = (1\,3\,6) \circ (2\,10\,9\,8\,5)$.

Avec $\varepsilon(\sigma_1) = (-1)^2 = 1$ et $\varepsilon(\sigma_2) = (-1)^4 = 1$, on obtient $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1)\,\varepsilon(\sigma_2) = 1$.

Copyrighted material

Définition 9

Le **groupe alterné** $\mathcal{A}_n$ est le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ constitué des permutations paires de $\mathbb{N}_n$.

Propriété 6

$\mathcal{A}_n$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

☞ C'est en effet le noyau du morphisme «signature» de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$.

Exemple 9 Étude de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{10}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 5 & 10 & 8 & 1 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

- Nous avons $\sigma(1) = 3$, $\sigma(3) = 9$, $\sigma(9) = 7$ et $\sigma(7) = 1$. Soit alors le cycle $c_1 = (1\ 3\ 9\ 7)$.

Puis, $\sigma(2) = 6$, $\sigma(6) = 8$, $\sigma(8) = 4$, $\sigma(4) = 5$, $\sigma(5) = 10$ et $\sigma(10) = 2$.

Soit alors $c_2 = (2\ 6\ 8\ 4\ 5\ 10)$. σ se décompose en $\sigma = c_1 \circ c_2$.

- Avec $c_1 = (1\ 7) \circ (1\ 9) \circ (1\ 3)$ et $c_2 = (2\ 10) \circ (2\ 5) \circ (2\ 4) \circ (2\ 8) \circ (2\ 6)$, on obtient une décomposition de σ en produit de transpositions.
- Avec $\varepsilon(c_1) = (-1)^3$ et $\varepsilon(c_2) = (-1)^5$, on obtient $+1$ pour signature de σ.

B. Applications p-linéaires

Dans la suite de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Applications multilinéaires

Définition 10

Soit $E_1, \ldots, E_p$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de l'espace vectoriel produit $E_1 \times \ldots \times E_p$ dans F est dite p-**linéaire** lorsque : $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $\forall (a_k)_{k \in [\![1,p]\!] \setminus \{j\}} \in \prod_{k \neq j} E_k$

$$\begin{cases} f_j : & E_j & \to & F \\ & x_j & \mapsto & f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_p) \end{cases}$$ est linéaire.

Si $p = 1$, f est linéaire de E_1 dans F.

Si $p = 2$, on dit que f est bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F.

Si $p = 3$, on dit que f est trilinéaire de $E_1 \times E_2 \times E_3$ dans F.

Définition 11

Une **forme** p-linéaire sur $\prod_{k \in [\![1,p]\!]} E_k$ est une application p-linéaire de $\prod_{k \in [\![1,p]\!]} E_k$ dans $\mathbb{K}$.

Notation 4

On note $\mathcal{L}_p(E, F)$ l'ensemble des applications p-linéaires de E^p dans F. ✎ (13)
L'ensemble $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$ des formes p-linéaires sur E est noté $\mathcal{L}_p(E)$.

✎ (13) Cas particulier où $E = E_1 = \ldots = E_p$.

Propriété 7

$\mathcal{L}_p(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

C'est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel F^{E^p} des applications de E^p dans F.

Propriété 8

Soit $f : E^p \to F$ une application p-linéaire et $V = (v_i)_{i \in [\![1,p]\!]} \in E^p$. S'il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $v_i = 0$, alors $f(V) = 0$.

Copyrighted material

Exemple 10 Soit p un entier au moins égal à 2 et E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

$\mathcal{L}_p(E,F) \cap \mathcal{L}(E^p,F)$ est réduit à l'application nulle sur E^p. ✎ (14)

Soit $V=(v_i)_{i\in[\![1,p]\!]}\in E^p$. Pour $j\in[\![1,p]\!]$, on considère $V_j=(\delta_{ij}v_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$: $V=\sum_{i\in[\![1,p]\!]} V_j$.

Si f est p-linéaire sur E, on a $f(V_j)=0$ pour tout j et donc $\sum_{j\in[\![1,p]\!]} f(V_j)=0$.

Si de plus f est linéaire sur E^p, on a $f(V)=\sum_{j\in[\![1,p]\!]} f(V_j)$ donc $f(V)=0$.

Ainsi, $f(V)=0$ pour tout $V\in E^p$.

✎ (14) Il faut distinguer les applications linéaires sur E^p des applications p-linéaires sur E.

Exemple 11 Exemple utile de forme p-linéaire sur E.

Soit $(\theta_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une famille de p formes linéaires sur E.

Alors l'application f de E^p dans $\mathbb{K}$ définie par $f(x_1,\dots,x_p)=\theta_1(x_1)\cdots\theta_p(x_p)$ est une forme p-linéaire sur E. ✎ (15)

✎ (15) Une fois la question posée, la preuve est aisée.

2. Applications p-linéaires symétriques, antisymétriques ou alternées

$\mathfrak{S}_p$ est le groupe des permutations de $[\![1,p]\!]$ et, pour $\sigma\in\mathfrak{S}_p$, on note $\varepsilon(\sigma)$ sa signature.

Notation 5

Soit f une application de E^p dans F. Étant donné $\sigma\in\mathfrak{S}_p$, on note f_σ l'application de E^p dans F définie par $f_\sigma(x_1,\dots,x_p)=f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)})$.

Propriété 9

Soit σ et σ' des permutations de $[\![1,p]\!]$, et f une application de E^p dans F. Alors

$$(f_\sigma)_{\sigma'}=f_{\sigma\circ\sigma'}.$$

☞ En posant $g=f_\sigma$, on a $(f_\sigma)_{\sigma'}(x_1,\dots,x_p)=g(x_{\sigma'(1)},\dots,x_{\sigma'(p)})=f_\sigma(x_{\sigma'(1)},\dots,x_{\sigma'(p)})$
d'où $(f_\sigma)_{\sigma'}(x_1,\dots,x_p)=f((x_{\sigma\circ\sigma'(1)},\dots,x_{\sigma\circ\sigma'(p)})=f_{\sigma\circ\sigma'}(x_1,\dots,x_p)$.

Propriété 10

Si f est une application p-linéaire de E dans F et si σ est une permutation de $[\![1,p]\!]$, alors f_σ est p-linéaire.

Définition 12

Soit f une application de E^p dans F. On dit que f est

a) **symétrique** si $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_p,\ f_\sigma=f$

b) **antisymétrique** si $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_p,\ f_\sigma=\varepsilon(\sigma)f$

c) **alternée** si $\forall(x_1,\dots,x_p)\in E^p,\ \mathrm{Card}\{x_1,\dots,x_p\}<p \Rightarrow f(x_1,\dots,x_p)=0$.

Propriété 11

Soit f une application de E^p dans F.

f est symétrique si et seulement si, pour toute transposition $\tau\in\mathfrak{S}_p$, $f_\tau=f$.

f est antisymétrique si et seulement si, pour toute transposition $\tau\in\mathfrak{S}_p$, $f_\tau=-f$.

Copyrighted material

a) Condition nécessaire. Supposons f symétrique (resp. antisymétrique).
Pour toute transposition τ, nous avons $f_\tau = f$ (resp. $f_\tau = \varepsilon(\tau)f = -f$).

b) Condition suffisante. Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ se décompose en produit de transpositions : $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_r$.
On a donc $f_\sigma = f_{\tau_1 \cdots \tau_r} = (f_{\tau_1})_{\tau_2 \cdots \tau_{r-1}\tau_r}$. (16)
Si $f_\tau = f$ pour toute transposition τ, on obtient $f_\sigma = f$.
Si $f_\tau = -f$ pour toute transposition τ, on obtient $f_\sigma = \varepsilon(\sigma)f$.

(16) On procède par récurence sur le nombre de transpositions utilisées dans une décomposition de σ.

Propriété 12

Si f est une application p-linéaire alternée, alors elle est antisymétrique.

Soit i et j dans $[\![1, p]\!]$, avec $i \neq j$ et τ la transposition $(i\,j)$.
La p-linéarité permet d'écrire

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_i + x_j, \cdots, x_j + x_i, \cdots, x_p) = {} & f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_i, \cdots, x_p) \\ & + f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_p) \\ & + f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_p) \\ & + f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_j, \cdots, x_p) \end{aligned}$$

On a $f(x_1, \cdots, x_i + x_j, \cdots, x_j + x_i, \cdots, x_p) = 0$ puisque f est alternée.
De même $f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_i, \cdots, x_p) = 0$ et $f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_j, \cdots, x_p) = 0$.
Il vient alors $f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_p) + f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_p) = 0$.
Avec $f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_p) = f_\tau(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_p)$, on obtient :

$$f_\tau(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_p) = -f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_p).$$

La propriété **11** permet alors de conclure.

Propriété 13

Si f est une application p-linéaire antisymétrique, alors elle est alternée. (17)

(17) On rappelle que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit i et j dans $[\![1, p]\!]$, avec $i \neq j$. Considérons alors la transposition $\tau = (i\,j)$.
$f_\tau(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_p) = f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_p)$ par définition de f_τ.
Or $f_\tau(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_p) = -f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_p)$. (18)
En particulier, si $x_i = x_j$ on obtient $2f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_i, \cdots, x_p) = 0$, c'est-à-dire :

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_i, \cdots, x_p) = 0.$$

(18) f est antisymétrique.

C. Formes n-linéaires alternées Déterminant dans une base

1. Développement suivant une base

1.1 – Notations

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.
Notons $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ la famille des formes coordonnées associées à cette base ; étant donné $u \in E$: $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $e_i^*(u) = \alpha_i$.

Soit une famille $\mathcal{V} = (v_1, \cdots, v_n)$ une famille de n éléments de E et $A = [\alpha_{ij}]$ la matrice de $\mathcal{V}$ dans la base $\mathcal{B}$: pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i$.

Copyrighted material

1.2 – Développement de $\varphi(\mathcal{V}) = \varphi(v_1, \dots, v_n)$

Théorème 4

Soit φ une forme n-linéaire antisymétrique sur E. On a

$$\varphi(\mathcal{V}) = \varphi(v_1, \dots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \alpha_{\sigma(i)i} \right) \varphi(\mathcal{B}).$$

☞ La n-linéarité de φ donne $\varphi(v_1, \dots, v_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in [\![1, n]\!]^n} \alpha_{i_1 1} \cdots \alpha_{i_n n} \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$.

Pour $(i_1, \dots, i_n) \in [\![1, n]\!]^n$ tel que $\text{Card}(i_1, \dots, i_n) < n$, on a $\varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$ puisque φ est alternée.

Il ne reste donc que la somme des termes $\alpha_{i_1 1} \cdots \alpha_{i_n n} \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ tels que :

$$\text{Card}(i_1, \dots, i_n) = n,$$

c'est-à-dire tels que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ est une permutation σ de $[\![1, n]\!]$, de signature $\varepsilon(\sigma)$. Il vient donc :

$$\varphi(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha_{\sigma(1)1} \cdots \alpha_{\sigma(n)n} \varphi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

φ étant antisymétrique, on a $\varphi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \varphi(e_1, \dots, e_n)$ et finalement :

$$\varphi(v_1, \dots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \cdots \alpha_{\sigma(n)n} \right) \varphi(e_1, \dots, e_n).$$

Propriété 14

$$\varphi(\mathcal{V}) = \varphi(v_1, \dots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma(i)} \right) \varphi(\mathcal{B}). \quad \text{(19)}$$

(19) On utilise ici $\alpha_{i,\sigma(i)}$ au lieu de $\alpha_{\sigma(i)i}$.

☞ Avec $j = \sigma(i)$ et donc $i = \sigma^{-1}(j)$, on a $\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \alpha_{\sigma(i)i} = \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^{n} \alpha_{j\sigma^{-1}(j)}$ car $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$. L'application $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ étant une bijection de $\mathfrak{S}_n$, il vient :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \alpha_{\sigma(i)i} = \sum_{\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^{n} \alpha_{j\sigma^{-1}(j)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \alpha_{j\sigma(j)}.$$

1.3 – Définition

Définition 13

Avec les notations de ce paragraphe, $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \alpha_{\sigma(i)i}$ est appelé le **déterminant dans la base** $\mathcal{B}$ de la famille $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$. On le note $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$.

1.4 – Exemples : déterminants d'ordres 2 ou 3

Les déterminants d'ordre 2 ou 3 ont été vus en PCSI ou MPSI.

L'objectif est ici de voir comment ces cas particuliers s'inscrivent dans le contexte général.

Exemple 12 Déterminant d'ordre 2

Plaçons-nous dans le cas d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et considérons des vecteurs v_1 et v_2. Soit $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ la matrice de leurs coordonnées dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

Il y a deux éléments dans $\mathfrak{S}_2$: l'identité et la transposition (1 2). On a donc :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2) = \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{12}$$

Copyrighted material

Exemple 13 **Règle de Sarrus** pour un déterminant d'ordre 3.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et des vecteurs v_1, v_2 et v_3 donnés par la matrice $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$ de leurs coordonnées dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Il y a, dans $\mathfrak{S}_3$, trois permutations paires : l'identité, le cycle $(1\,2\,3)$ et le cycle $(1\,3\,2)$, et trois permutations impaires : les transpositions $(1\,2)$, $(2\,3)$ et $(3\,1)$. On a donc :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13} + \alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{32}\alpha_{23} - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13}$$

Un moyen commode de retenir ce résultat est de recopier les colonnes 1 et 2 de la matrice à la suite de la colonne 3. On effectue les produits de trois termes situés sur une parallèle à la diagonale principale (avec le signe +) ou à la diagonale seconde (avec le signe −).



2. Ensemble des formes n-linéaires alternées [20]

[20] Conformément au programme, les résultats de ce paragraphe peuvent être admis.

Propriété 15

Si f est une forme n-linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, alors

$$F = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) f_\sigma \text{ est } n\text{-linéaire antisymétrique sur } E.$$

☞ La n-linéarité de f entraîne celle de $f_\sigma : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$ puis celle de $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) f_\sigma$.

Étant donné $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$, on a $F_{\sigma'} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)(f_\sigma)_{\sigma'}$. Avec la propriété **9**, il vient :

$$F_{\sigma'} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) f_{\sigma \circ \sigma'}$$

et $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\sigma')$ permet alors d'écrire $F_{\sigma'} = \varepsilon(\sigma') \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma \circ \sigma') f_{\sigma \circ \sigma'}$.

Il reste à noter que $\sigma \mapsto \sigma \circ \sigma'$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ pour obtenir $F_{\sigma'} = \varepsilon(\sigma')F$.

Théorème 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E.

a) Il existe une forme n-linéaire antisymétrique sur E et une seule $\varphi_{\mathcal{B}}$ telle que $\varphi_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$, c'est $\det_{\mathcal{B}}$.

b) L'ensemble $\mathcal{A}_n(E)$ des formes n-linéaires antisymétriques sur E est une droite vectorielle, et $(\varphi_{\mathcal{B}})$ en est une base.

Copyrighted material

a) ▪ On a posé $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \alpha_{\sigma(i)i}$.

On a également vu que $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma(i)}$. ✎ (21)

✎ (21) Propriété 14.

Or $\alpha_{i\sigma(i)} = e_i^*(v_{\sigma(i)})$ où e_i^* est la $i^{\text{ième}}$ forme coordonnée associée à la base $\mathcal{B}$.

Posons alors $\theta : (v_1, \dots, v_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} e_i^*(v_i)$. C'est une forme n-linéaire sur E.

La propriété **15** montre que $\varphi_{\mathcal{B}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\theta_\sigma$ est n-linéaire antisymétrique sur E.

▪ Quels que soient i et j dans $[\![1, n]\!]$, on a $e_i^*(e_{\sigma(i)}) = \delta_{i\sigma(i)}$.

Il vient alors $\theta(e_1, \dots, e_n) = 1$ et, pour $\sigma \neq \mathrm{Id}$, $\theta_\sigma(e_1, \dots, e_n) = 0$.

Par suite, $\varphi_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

▪ En conclusion, $\varphi_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire antisymétrique qui prend la valeur 1 pour la famille $(e_1, \dots, e_n)$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

b) Soit f une forme n-linéaire alternée sur E. Le développement de $f(v_1, \dots, v_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ nous a montré que

$$f(v_1, \dots, v_n) = f(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n),$$

c'est-à-dire $f = f(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}$.

On en déduit que, si $f(e_1, \dots, e_n) = 1$, alors $f = \det_{\mathcal{B}}$ et que l'ensemble des formes n-linéaires antisymétriques sur E est la droite vectorielle engendrée par $\det_{\mathcal{B}}$.

3. Propriétés d'un déterminant

3.1 – Propriétés algébriques

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

$\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n-linéaire alternée sur E qui prend la valeur 1 pour les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Les premières propriétés d'un déterminant sont donc celles d'une forme n-linéaire alternée ou antisymétrique sur E.

Propriété 16

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\det_{\mathcal{B}}(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$.

Propriété 17

$\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire par rapport à la première variable. Cela se traduit par : quels que soient $v_0, v_1, \dots, v_n$ dans E, et λ_0, λ_1 dans $\mathbb{K}$,

$\det_{\mathcal{B}}(\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1, v_2, \dots, v_n) = \lambda_0 \det_{\mathcal{B}}(v_0, v_2, \dots, v_n) + \lambda_1 \det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Propriété 18

Quels que soient $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$,

$$\det_{\mathcal{B}}\left(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k v_k\right) = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n).$$

C'est une application de la linéarité par rapport au dernier terme et du fait que $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée.

Copyrighted material

Remarque

De cette propriété il résulte que, si à un vecteur on ajoute une combinaison linéaire des autres, on ne change pas le déterminant.

La propriété **18** traduit cela en privilégiant le $n^{\text{ième}}$ vecteur. La propriété **16** permet de voir qu'il en est de même en privilégiant tout autre vecteur.

Exemple 14 Étant donné $(v_1, \cdots, v_n) \in E^n$, on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_2, \cdots, v_n - v_{n-1}) = \det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \cdots, v_n).$$

Au vecteur $v_2 - v_1$ qui figure en $2^{\text{ème}}$ position, on ajoute le vecteur v_1 qui est en $1^{\text{ère}}$ position.

On obtient alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_2, \cdots, v_n - v_{n-1}) = \det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3 - v_2, \cdots, v_n - v_{n-1}).$$

Au vecteur $v_3 - v_2$, en $3^{\text{ème}}$ position, on ajoute v_2 pour obtenir :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3 - v_2, \cdots, v_n - v_{n-1}) = \det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3, v_4 - v_3, \cdots, v_n - v_{n-1})$$

d'où $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_2, \cdots, v_n - v_{n-1}) = \det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3, v_4 - v_3, \cdots, v_n - v_{n-1})$.

En réitérant cette démarche, on déduit le résultat annoncé.

4. Changement de base, famille libre

Propriété 19

Étant donné des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E,

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$$

☞ a) Étant donné une base de E, le déterminant dans cette base est une forme n-linéaire alternée, avec le théorème **5** a).

En utilisant le théorème **5** b), il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$.

En particulier, $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$, et avec $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$, il vient $\lambda = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

Corollaire

Étant donné des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E,

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$$

☞ $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = 1$ et $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ donnent $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.

Théorème 6

Soit $\mathcal{V} = (v_1, \cdots, v_n)$ une famille de n éléments d'un espace vectoriel E de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E.

$$\mathcal{V} \text{ est une base si et seulement si } \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{V}) \neq 0.$$

☞ a) Si $\mathcal{V}$ est une famille liée, un au moins des v_i est combinaison linéaire des autres.

La propriété **18** montre alors que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{V}) = 0$.

b) Si $\mathcal{V}$ est libre, c'est une base de E et $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{V}) \det_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) = 1$ montre que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{V})$ n'est pas nul.

Copyrighted material

D. Déterminant d'un endomorphisme

E est toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f est un endomorphisme de E.

Théorème 7

Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ de E.

Avec $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, on note $f(\mathcal{B})$ la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

☞ a) Étant donné une base $\mathcal{B}$ de E, l'application de E^n dans $\mathbb{K}$ définie par

$$\varphi : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f(v_1), \ldots, f(v_n))$$

est n-linéaire alternée sur E.

Donc, d'après le théorème **5**, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$.

b) Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases de E et les applications φ_1 et φ_2 qui leur sont associées comme ci-dessus. Il existe λ_1 et λ_2 tels que $\varphi_1 = \lambda_1 \det_{\mathcal{B}_1}$ et $\varphi_2 = \lambda_2 \det_{\mathcal{B}_2}$. On a :

$$\lambda_1 = \det_{\mathcal{B}_1}(f(\mathcal{B}_1)) \text{ et } \lambda_2 = \det_{\mathcal{B}_2}(f(\mathcal{B}_2)).$$

La formule de changement de base montre que, pour tout $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$, on a :

$$\det_{\mathcal{B}_2}(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = \det_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1) \det_{\mathcal{B}_1}(f(v_1), \ldots, f(v_n))$$

d'où $\varphi_2 = \det_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1)\varphi_1$ ou encore $\lambda_2 \det_{\mathcal{B}_2} = \lambda_1 \det_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1) \det_{\mathcal{B}_1} = \lambda_1 \det_{\mathcal{B}_2}$.

Il s'ensuit $\lambda_1 = \lambda_2$ c'est-à-dire $\det_{\mathcal{B}_1}(f(\mathcal{B}_1)) = \det_{\mathcal{B}_2}(f(\mathcal{B}_2))$.

Définition 14

Le nombre $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ est appelé le déterminant de f. On le note $\det f$.

Remarque

L'application $\det : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$ ainsi définie n'est pas linéaire.

En effet, étant donné $\alpha \in \mathbb{K}$, on a $\det(\alpha f) = \alpha^n \det f$.

La linéarité imposerait $\det(\alpha f) = \alpha \det f$, c'est-à-dire $\alpha^n = \alpha$. ✎ (22)

✎ (22) Ce qui n'est vrai que pour $\alpha=0$ ou $\alpha^{n-1}=1$.

Propriété 20

Soit f un endomorphisme de E et une base $\mathcal{B}$ de E. Pour tout $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$, on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(v_1) \ldots, f(v_2)) = \det f \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n)$$

Voir la démonstration du théorème **7**.

Propriété 21

Composée d'endomorphismes

Étant donné des endomorphismes f et g de E, on a $\det(g \circ f) = \det g \det f$.

☞ Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On a $\det(g \circ f) = \det_{\mathcal{B}}(g \circ f(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}[g(f(\mathcal{B}))]$.

D'après la propriété **20**, $\det_{\mathcal{B}}[g(f(\mathcal{B}))] = \det g \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$

et $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det f$ par définition.

Propriété 22

Caractérisation d'un automorphisme

Une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in \mathcal{L}(E)$ soit un automorphisme est $\det f \neq 0$.

☞ Soit $\mathcal{B}$ une base de E. f est un automorphisme si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une base de E, soit (d'après le théorème **6**) si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \neq 0$.

Copyrighted material

Propriété 23

Si f est un automorphisme de E, on a $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det f}$.

☞ On a $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ et donc $\det f \ \det(f^{-1}) = \det \mathrm{Id}$.
Il reste à remarquer que $\det \mathrm{Id} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Propriété 24

L'ensemble des automorphismes de déterminant égal à 1 est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$. On l'appelle le **groupe spécial linéaire** de E et on le note $\mathrm{SL}(E)$.

☞ $\det : \mathrm{GL}(E) \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ est un morphisme de groupes. $\mathrm{SL}(E)$ en est le noyau.

E. Déterminant d'une matrice carrée

1. Définition

Soit $M = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. À cette matrice, on peut associer la famille $(c_1, \ldots, c_n)$ de ses vecteurs-colonnes dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$. On peut aussi canoniquement lui associer l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$.
Nous pouvons alors donner trois définitions du déterminant de M.

Définition 15

Le déterminant de M, noté $\det M$, est le nombre défini de l'une des manières équivalentes suivantes :

(1) $\det M = \det_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, c_n)$ (2) $\det M = \det f$ (3) $\det M = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\,i}$

Remarque

Les définitions **(1)** et **(2)** sont équivalentes car, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = c_i$ et :

$$\det f = \det_{\mathcal{B}}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big) = \det_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, c_n)$$

Les définitions **(1)** et **(3)** sont équivalentes puisque l'expression donnée en **(3)** est le développement de $\det_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, c_n)$.

Notation 6

Le déterminant de $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ se note $\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

2. Propriétés

Propriété 25

Transposée d'une matrice

Étant donné $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det {}^tM = \det M$.

☞ Avec $M = [a_{ij}]$, posons ${}^tM = [b_{ij}]$: $b_{ij} = a_{ji}$. La formule développée de $\det {}^tM$ donne :

$$\det {}^tM = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} b_{\sigma(i)\,i} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)}$$

Le résultat donné en propriété **14** montre alors que $\det {}^tM = \det M$.

Copyrighted material

Propriété 26

Produit d'une matrice par un scalaire

Étant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Propriété 27

Produit de matrices

Étant donné A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det(AB) = \det A \det B$.

Propriété 28

Matrice inversible

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Alors, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Les matrices carrées d'ordre n ayant un déterminant égal à 1 constituent le groupe spécial linéaire, noté $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ [23]

[23] Voir la propriété **24**.

Exemple 15 Si $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ est antisymétrique, alors $\det A = 0$.

$\det {}^tA = \det A$ et ${}^tA = -A$ avec $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ donne :

$$\det(-A) = (-1)^{2n+1} \det A = -\det A$$ [24]

Donc $\det A = -\det A$ et $\det A = 0$.

[24] La dimension impaire est essentielle.

Exemple 16 Si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 = -I_n$, alors nécessairement n est pair.

$\det(-I_n) = (-1)^n$ et $\det(A^2) = (\det A)^2$ donc $(\det A)^2 = (-1)^n$ ce qui exige n pair.

Un exemple de telle matrice dans le cas $n = 2$: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

3. Matrices triangulaires ou triangulaires par blocs

Théorème 8

Matrice triangulaire

Étant donné $T = [t_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire, on a : $\det T = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$.

☞ Supposons que $t_{ij} = 0$ pour $i > j$ (matrice triangulaire supérieure). [25]

Utilisons $\det T = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} t_{\sigma(i)\,i}$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Si il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(k) > k$, on a $t_{\sigma(k)\,k} = 0$ et $\prod_{i=1}^{n} t_{\sigma(i)\,i} = 0$.

Il ne reste donc à examiner, dans la somme, que le cas de permutations σ telles que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(k) \leqslant k$. Seule l'identité sur $[\![1, n]\!]$ convient.

En conclusion, $\det T = \varepsilon(\mathrm{Id}) \prod_{i=1}^{n} t_{\mathrm{Id}(i)\,i} = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$.

[25] Le cas où T est triangulaire inférieure s'en déduit avec la propriété **25**.

Théorème 9

Matrice triangulaire par blocs

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}$ avec :

$$A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_s(\mathbb{K}),\ r + s = n,\ B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K}),$$

(0) étant la matrice nulle de $\mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det M = \det A \det C.$$

Copyrighted material

☞ a) Posons $P = \begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & I_q \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} I_p & B \\ (0) & I_q \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} I_p & (0) \\ (0) & C \end{pmatrix}$. où (0) représente la matrice nulle de $\mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{K})$ ou de $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$.

On vérifie aisément que $M = RQP$. Par suite, $\det M = \det R \det Q \det P$.

b) 1) Q est triangulaire, de termes diagonaux tous égaux à 1 ; on a donc $\det Q = 1$.

2) Notons p_{ij} le terme général de $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et a_{ij} celui de $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$.

On a $p_{ij} = a_{ij}$ pour $i \leqslant r$ et $j \leqslant r$ et $p_{ij} = \delta_{ij}$ si $i > r$ ou $j > r$.

Utilisons $\det P = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\pi_\sigma$ où $\pi_\sigma = \prod_{i=1}^{n} p_{\sigma(i)\,i}$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\exists j \in [\![r+1, n]\!]$, $\sigma(j) \neq j$. De $p_{\sigma(j)j} = 0$ on déduit $\pi_\sigma = 0$.

Il ne reste à examiner que les $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma(j) = j$ pour tout $j \in [\![r+1, n]\!]$. Notons ρ la restriction de σ à $[\![1, r]\!]$. C'est une permutation de $[\![1, r]\!]$. On a :

$$\pi_\sigma = \prod_{i=1}^{n} p_{\sigma(i)\,i} = \prod_{i=1}^{r} p_{\sigma(i)\,i} \prod_{i=r+1}^{n} p_{i\,i} = \prod_{i=1}^{r} a_{\rho(i)\,i}$$

Il reste à remarquer que $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\rho)$ pour obtenir $\det P = \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon(\rho) \prod_{i=1}^{r} a_{\rho(i)\,i} = \det A$.

3) On montre de même que $\det Q = \det C$. Et en conclusion : $\det M = \det A \det C$. ✎ (26)

✎ (26) Il est à noter que $\det M$ ne dépend pas du bloc B.

Exemple 17 Deux calculs du déterminant de la matrice $M_n = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général $a_{ij} = \inf\{i, j\}$.

- Soit $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les vecteurs-colonnes de M_n et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n$.

On a $\det M_n = \det_{\mathcal{B}}(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \det(c_1, c_2 - c_1, \ldots, c_n - c_1)$, donc :

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & & \\ \vdots & \ddots & (0) & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

- Soit $T_n = [t_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $t_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } & i \leqslant j \\ 0 \text{ si } & i > j \end{cases}$

On vérifie que $\inf\{i, j\} = \sum_{k=1}^{n} t_{k\,i}\, t_{k\,j}$. On voit alors que $M_n = {}^t T_n \cdot T_n$, d'où :

$$\det M_n = (\det T_n)^2.$$

T_n étant triangulaire, de termes diagonaux égaux à 1, il vient $\det T_n = 1$ puis $\det M_n = 1$.

4. Deux déterminants classiques

4.1 – Déterminant de Vandermonde

Définition 16

Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Le déterminant de Vandermonde $V(a_1, \ldots, a_n)$ est le déterminant de la matrice $W_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général $m_{ij} = a_i^{j-1}$

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Propriété 29

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Copyrighted material

☞ Soit P_n le polynôme $\prod_{i=1}^{n-1}(X-a_i) = X^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k X^{k-1}$. En notant V_n ce déterminant et $c_0, \ldots, c_{n-1}$ les vecteurs-colonnes de W_n, on a :

$$V_n = \det_{\mathcal{B}}(c_0, \ldots, c_{n-1}) = \det_{\mathcal{B}}\left(c_0, \ldots, c_{n-2}, c_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k c_{k-1}\right)$$

c'est-à-dire $V_n = \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & M_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} \quad P_n(a_n) \end{vmatrix}$ car $P_n(a_i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Il s'ensuit $V_n = P_n(a_n)V_{n-1}$. Avec $V_1 = 1$, on a

$$V_n = \prod_{k=2}^{n} P_k(a_k) \text{ c'est-à-dire } V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i).$$

Exemple 18 Calcul du déterminant D de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2a+3 & 3a^2+4a & 4a^3+5a^2 \\ 1 & 2b+3 & 3b^2+4b & 4b^3+5b^2 \\ 1 & 2c+3 & 3c^2+4c & 4c^3+5c^2 \\ 1 & 2d+3 & 3d^2+4d & 4d^3+5d^2 \end{pmatrix}$.

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$.

On a $M = VA$ d'où $D = \det V \det A$. La matrice A est triangulaire et $\det A = 24$.

$\det V = V(a,b,c,d) = (d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$.

On a donc $D = 24(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$.

4.2 – Déterminants circulants droits

Définition 17

On appelle **déterminant circulant droit** associé à la famille $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{C}^n$ le déterminant $C_n(a_1, \ldots, a_n)$ de la matrice dite circulante droite

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Propriété 30

Soit P le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$ et $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ la famille des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1. Alors :

$$C_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} P(\theta_j).$$

☞ Soit V_θ la matrice-colonne de termes $1, \theta, \ldots, \theta^{n-1}$ où θ est une racine $n^{\text{ième}}$ de 1.

On vérifie aisément que $\Gamma_n \cdot V_\theta = P(\theta)\, V_\theta$.

Considérons la matrice U dont les colonnes sont $V_{\theta_1}, V_{\theta_2}, \ldots, V_{\theta_n}$; on a alors :

$$\Gamma_u \cdot U = U \cdot \operatorname{diag}[P(\theta_1), \ldots P(\theta_n)].$$

Il vient donc $\det\Gamma_n \det U = \det U \prod_{j=1}^{n} P(\theta_j)$. Notons que $\det U$ est le déterminant de Vandermonde $V(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$; il n'est donc pas nul. Il s'ensuit $C_n = \prod_{j=1}^{n} P(\theta_j)$.

Copyrighted material

Exemple 19 Calculer du déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

Il s'agit du déterminant circulant $C_n(1, 2, \ldots, n)$.

Soit $P(X) = \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}$. C'est le polynôme dérivé de $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} X^k$.

Avec $Q(X) = \dfrac{X^{n+1}-1}{X-1}$ il vient $P(X) = \dfrac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{(X-1)^2}$;

et par suite, pour θ racine $n^{\text{ième}}$ de 1 et différente de 1, on a $P(\theta) = \dfrac{n}{\theta - 1}$.

En prenant $\theta_n = 1$, on a $C_n = P(1)\dfrac{n^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1}(\theta_k - 1)}$. En outre $P(1) = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Les $y_k = \theta_k - 1$ sont les racines de $R(X) = (X+1)^n - 1 = X(X^{n-1} + \cdots + n)$.
Le produit des y_k non nuls est donc $(-1)^{n-1}n$.

On obtient finalement $C_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.

F. Développement d'un déterminant suivant une colonne ou une ligne

1. Cofacteurs

Soit $M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Notons $F = (c_1, \ldots, c_n)$ la famille des vecteurs-colonnes de M.

Soit $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Soit la famille $F_j(v)$ de vecteurs obtenue en remplaçant c_j par v dans F,

et $M_j(v)$ la matrice dont la famille des vecteurs-colonnes est $F_j(v)$. En particulier, $M_j(c_j) = M$.

On a $\det M_j(v) = \det_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, v, \ldots, c_n) = \det_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, c_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, c_{j+1}, \ldots, c_n)$

d'où $\det M_j(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i \det_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, c_{j-1}, e_i, c_{j+1}, \ldots, c_n)$.

Remarquons que $\det_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, c_{j-1}, e_i, c_{j+1}, \ldots, c_n)$ est le déterminant de $M_j(e_i)$.

Définition 18

Le scalaire $\gamma_{ij}(M) = \det_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, c_{j-1}, e_i, c_{j+1}, \ldots, c_n)$ ou $\gamma_{ij}(M) = \det M_j(e_i)$ est appelé le **cofacteur** (i, j) de M. [27]

[27] S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note γ_{ij} au lieu de $\gamma_{ij}(M)$.

Application au calcul d'un déterminant

Avec $M = M_j(c_j)$ et $c_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} e_i$, il vient

$$\det M = \det M_j(c_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \det_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, c_{j-1}, e_i, c_{j+1}, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\gamma_{ij}$$

Copyrighted material

Définition 19

L'expression $\det M = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\gamma_{ij} = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\det_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, c_{j-1}, e_i, c_{j+1}, \ldots, c_n)$ est appelée le développement de $\det M$ suivant la $j^{\text{ième}}$ colonne.

Remarque

Avec $\det M = \det {}^tM$, on a également le développement de $\det M$ suivant la $i^{\text{ième}}$ ligne :

$$\det M = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\gamma_{ij}$$

2. Comatrice

Définition 20

La **comatrice** de M est la matrice $[\gamma_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des cofacteurs de M. On la note $\operatorname{Com} M$.

Définition 21

La matrice **complémentaire** de M est la transposée de la comatrice de M. On la note $\widetilde{M}$.

$$\widetilde{M} = {}^t(\operatorname{Com} M)$$

Théorème 10

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$. Alors M et $\widetilde{M}$ vérifient :

$$\widetilde{M} \cdot M = (\det M) I_n$$

☞ Avec les notations du paragraphe précédent, on a :

$$\det M_j(c_k) = \det_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, \underbrace{c_k}_{j^{\text{ième}}\text{ terme}}, \ldots, c_n) = \delta_{kj}\det M.$$

Par ailleurs, le développement de $\det M_j(c_k)$ nous donne $\det M_j(c_k) = \sum_{i=1}^{n} m_{ik}\gamma_{ij}$.

On en déduit $\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} m_{ik} = \delta_{jk}\det M$.

Il s'agit de l'égalité des termes (j, k) des matrices ${}^t(\operatorname{Com} M).M$ et $(\det M)I_n$.

Propriété 31

Étant donné $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{Com}({}^tM) = {}^t(\operatorname{Com} M) = \widetilde{M}$.

☞ En faisant intervenir les cofacteurs de ${}^tM$, on voit que $\gamma_{ji}({}^tM) = \gamma_{ij}(M)$.

Propriété 32

Étant donné $M \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, on a : $M \cdot \widetilde{M} = (\det M) I_n$.

☞ On a vu que ${}^t(\operatorname{Com} M) \cdot M = (\det M) I_n$. En transposant, il vient :

$${}^tM \cdot \operatorname{Com} M = (\det M) I_n$$

En appliquant ce résultat à ${}^tM$, il vient : $M \cdot \operatorname{Com}({}^tM) = (\det {}^tM) I_n$.

Avec $\det {}^tM = \det M$ et $\operatorname{Com}({}^tM) = \widetilde{M}$, on obtient $M \cdot \widetilde{M} = (\det M) I_n$.

Copyrighted material

Propriété 33

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$. Alors

$$\det(\operatorname{Com} M) = \det \widetilde{M} = (\det M)^{n-1}$$

☞ a) Suppposons M inversible.

On a $\det(\widetilde{M} \cdot M) = \det \widetilde{M} \cdot \det M$ et $\det\left[(\det M) I_n\right] = (\det M)^n \det I_n = (\det M)^n$.

De $\widetilde{M} \cdot M = (\det M) I_n$ on déduit $\det \widetilde{M} \cdot \det M = (\det M)^n$ et, puisque $\det M \neq 0$:

$$\det \widetilde{M} = (\det M)^{n-1}.$$

b) Supposons M non inversible, c'est-à-dire $\det M = 0$.

Si $\det \widetilde{M}$ est non nul, alors $\widetilde{M}$ est inversible. Or $\widetilde{M} \cdot M = (\det M)^n I_n = 0$. Il vient alors $M = 0$, d'où $\widetilde{M} = 0$, ce qui est en contradiction avec $\widetilde{M}$ inversible.

Par suite, si $\det M = 0$, alors $\det \widetilde{M} = 0$ et on a encore $\det \widetilde{M} = (\det M)^{n-1}$.

Propriété 34

Inverse d'une matrice

Pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a :

a) $\widetilde{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, b) $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M} \widetilde{M}$.

C'est un corollaire immédiat du théorème **10**.

Exemple 20 **Matrice carrée d'ordre 2**

Comatrice, la matrice complémentaire et l'inverse éventuelle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\gamma_{11} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{vmatrix} = d, \ \gamma_{12} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b, \ \gamma_{21} = \begin{vmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{vmatrix} = -c, \ \gamma_{22} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} = a,$$

c'est-à-dire $\operatorname{Com} M = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Noter que l'on passe de M à $\widetilde{M}$ en échangeant les termes de la première diagonale et en changeant de signe ceux de la diagonale seconde.

Si $\det M = ad - bc \neq 0$, on a $M^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

3. Mineurs et calcul des cofacteurs

3.1 – Méthode

Avec les notations du paragraphe **A**, le cofacteur (i, j) de M est

$$\gamma_{ij} = \det M_j(e_i) = \det_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, c_{j-1}, e_i, c_{j+1}, \ldots, c_n)$$

Sur la matrice M, on effectue sur les colonnes la permutation $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ j)$ pour obtenir la matrice Q dont les colonnes sont $(e_i, c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_n)$. On a ainsi :

$$\det Q = (-1)^{j-1} \det M_j(e_i) \quad \text{puisque la signature de } \sigma \text{ est } (-1)^{j-1}$$

Soit $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ la famille des vecteurs-lignes de la matrice Q.

Sur la matrice Q, on effectue sur les lignes la permutation $\rho = (1\ 2\ \ldots\ i)$ pour obtenir la matrice R dont les colonnes sont $(l_i, l_1, \ldots, l_{i-1}, l_{i+1}, \ldots, l_n)$. On a ainsi :

$$\det R = (-1)^{i-1} \det Q \quad \text{puisque la signature de } \rho \text{ est } (-1)^{i-1}$$

Il s'ensuit $\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det R$.

Copyrighted material

3.2 – Étude de la matrice R

La matrice R a la forme $R = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ (28)

(28) M_{ij} est la matrice extraite de M en supprimant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne.

Définition 22

Étant donné i et j dans $[\![1, n]\!]$, avec $n \geqslant 2$, on appelle **mineur** (i, j) de la matrice M le déterminant de la matrice M_{ij} extraite de M par suppression de la ligne i et de la colonne j.
Ce mineur est noté Δ_{ij}.

Propriété 35

Le cofacteur (i, j) de M s'exprime à l'aide du mineur (i, j) par

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

3.3 – Application au calcul d'un déterminant

Soit une matrice $M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$;

le développement de $\det M$ suivant la colonne j est $\det M = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\gamma_{ij}$,

et le développement de $\det M$ suivant la ligne i est $\det M = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\gamma_{ij}$.

On en déduit les règles de calcul suivantes :

Propriété 36

a) $\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij}\Delta_{ij}$ b) $\det M = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij}\Delta_{ij}$

Remarques

1) Un calcul de déterminant d'ordre n se ramène à n déterminants d'ordre $n-1$.
2) On choisit de développer suivant une ligne ou une colonne qui comporte le maximum de 0.
3) Ce développement est souvent utile pour calculer un déterminant par récurrence.
4) La nécessité d'affecter $m_{ij}\Delta_{ij}$ du coefficient $(-1)^{i+j}$ rend utile de bien voir si un terme (i, j) est en «position paire» ($i + j$ pair) ou impaire ($i + j$ impair).

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & \cdots & (-1)^{n} \\ + & - & + & \cdots & (-1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n} & (-1)^{n-1} & \cdots & + \end{pmatrix}$$

Exemple 21 Avec $abc \neq 0$, l'équation $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$ d'inconnue x

peut se résoudre en développant suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 0 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il vient alors $abc = (ab + bc + ca)x$, d'où $x \neq 0$ puis $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Copyrighted material

G. Systèmes linéaires de Cramer

1. Notations [29]

[29] On rappelle l'essentiel des notations utilisées dans le chapitre précédent.

- $E = \mathbb{K}^p$, $F = \mathbb{K}^n$ avec n et p dans $\mathbb{N}^*$, de bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
- $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = [b_i] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $r = \operatorname{rg} A$.
- $f \in \mathcal{L}(E,F)$ canoniquement associée à A : $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$

Systèmes linéaire (L) et homogène (H)

Matriciel : $AX = B$ $\qquad AX = 0$ $\qquad X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Analytique :
$$\begin{cases} a_{1\,1}x_1 + \ldots + a_{1\,p}x_p = b_1 \\ a_{2\,1}x_1 + \ldots + a_{2\,p}x_p = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n\,1}x_1 + \ldots + a_{n\,p}x_p = b_n \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{1\,1}x_1 + \ldots + a_{1\,p}x_p = 0 \\ a_{2\,1}x_1 + \ldots + a_{2\,p}x_p = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n\,1}x_1 + \ldots + a_{n\,p}x_p = 0 \end{cases} \qquad (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$$

2. Formules de Cramer

Théorème 11

La solution d'un système de Cramer est : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ x_j = \dfrac{\det A_j(b)}{\det A}$. [30]

[30] $A_j(b)$ est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant le vecteur-colonne c_j par b.

☞ La solution $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est caractérisée par $b = \sum_{k=1}^{n} x_k c_k$.

On a donc $\det A_j(b) = \det_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, c_{j-1}, b, c_{j+1}, \ldots, c_n)$ d'où :

$$\det A_j(b) = \sum_{k=1}^{n} x_k \det_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, c_{j-1}, c_k, c_{j+1}, \ldots, c_n),$$

c'est-à-dire $\det A_j(b) = x_j \det_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, c_{j-1}, c_j, c_{j+1}, \ldots, c_n) = x_j \det A$.

Application au calcul de l'inverse d'une matrice.

La solution d'un système de Cramer $AX = B$ (en écriture matricielle) est $X = A^{-1}B$. [31]

Les expressions des x_i à l'aide des b_j donnent alors la matrice A^{-1}.

[31] Pour $n \geqslant 3$, on détermine souvent l'inverse d'une matrice par la résolution d'un système linéaire.

Exemple 22 Calcul de l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 60$ [32] donc A est inversible.

[32] En ajoutant la ligne 3 à la ligne 1.

Le système (L) : $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$,
$$\begin{cases} (1) & 5x + y - 3z = a \\ (2) & 2x + 4y - 2z = b \\ (3) & x - y + 3z = c \end{cases}$$

a donc une solution unique pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$.

(1) + (3) donne $6x = a + c$: $x = \dfrac{1}{6}(a + c)$ (4). En reportant dans (2) et (3), il vient : [33]

[33] Des implications suffisent, puisque l'existence est assurée.

(5) $4y - 2z = \dfrac{1}{3}(-a + 3b - c)$ et (6) $y - 3z = \dfrac{1}{6}(a - 5c)$

d'où : $y = \dfrac{1}{30}(-4a + 9b + 2c)$ et $z = \dfrac{1}{10}(-a + b + 3c)$.

Puis $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ donne $A^{-1} = \dfrac{1}{30} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ -4 & 9 & 2 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Copyrighted material

Méthodes

L'essentiel

I. Permutations et déterminants

✔ Les objectifs sont essentiellement

- les composées de permutations

  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 1, 2

- la signature d'une permutation

  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 1, 2, 3

✔ **Si l'on veut** calculer la signature d'une permutation,

- **on peut** compter ses inversions,
- **on peut** la décomposer en produit de permutations,

  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 1, 2, 4, 5

- **on peut** la décomposer en produit de cycles, en admettant le théorème d'existence et d'unicité à l'ordre près.
  C'est la methode la plus facile pour décomposer en produit de transpositions.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 1

- **on peut** décomposer en produit de transpositions en exploitant l'algorithme inhérent au théorème d'existence.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 2

II. Matrice de permutation

✔ À chaque permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on associe une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dont le déterminant est égal à la signature de σ.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 3

✔ **Si l'on veut** Calculer un déterminant voisin d'un déterminant classique (matrice circulante, matrice diagonale, ...),

- **on peut** mettre en œuvre le produit par une matrice de permutation

  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 4, 5

III. Calculs de déterminants

✔ **Si l'on veut** calculer un déterminant

- **on peut** établir une relation de récurrence sur l'ordre du déterminant

  ✔ Pour une suite récurrente linéaire double, on peut éviter l'application de la méthode générale par une remarque adaptée à l'exemple étudié.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 6, 7

- **on peut** mettre en œuvre la n-linéarité

  ✔ en ajoutant à une ligne ou à une colonne une combinaison linéaire des autres,

  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 8, 10

  ✔ en utilisant la linéarité par rapport à une colonne (ou une ligne)

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 11

Copyrighted material

- **on peut** développer suivant une ligne (ou une colonne)

  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 6, 7, 8, 9, 10

- **on peut** effectuer des opérations élémentaires pour se ramener à une matrice triangulaire ou triangulaire par blocs carrés

  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 9, 10

IV. Changement de base

✔ Toute forme n-linéaire non nulle sur un espace vectoriel de dimension n est un multiple du déterminant dans une base donnée.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 11

✔ Pour exprimer que A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(K)$, on évite l'inverse P^{-1} en écrivant $PB = AP$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 12

✔ Pour calculer la trace d'un endomorphisme, on peut préciser les images des vecteurs d'une base.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 13

✔ Pour calculer le déterminant de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut décomposer A en un produit BC où B et C sont plus faciles à étudier.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 13

✔ Pour choisir une base adaptée à la description d'un endomorphisme f par une matrice, on peut étudier $f - \lambda\,\mathrm{Id}$, avec λ scalaire.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 14

V. Déterminants et systèmes linéaires

✔ **Si l'on veut** étudier l'inversibilité d'une matrice

- **on peut** calculer son déterminant

  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 14, 15

✔ **Si l'on veut** calculer l'inverse d'une matrice carrée A

- **on peut** résoudre un système linéaire

  ✔ en utilisant l'endomorphisme f canoniquement associé à A et en cherchant les antécédants des vecteurs de la base canonique

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 15

  ✔ en résolvant un système linéaire sous forme classique.

  Des exemples ont été donnés en cours. Plusieurs mises en œuvre seront rencontrées dans les exercices résolus.

Copyrighted material

Mise en œuvre

I. Permutations et déterminants

Ex. 1

Décomposition en produit de cycles disjoints

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 4 & 3 & 8 & 7 & 10 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $\sigma = (1\ \ 9\ \ 5\ \ 7) \circ (2\ \ 4\ \ 8) \circ (6\ \ 10)$ et examiner comment obtenir cette décomposition.

En déduire un calcul de la signature de σ et une décomposition de σ en produit de transpositions.

Procéder de même pour $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 5 & 2 & 7 & 4 & 9 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Indications

Le théorème d'existence (et unicité à l'ordre près) de décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints est hors programme. La méthode est toutefois simple et efficace. Voir l'exemple 5 du cours.

Solution

1)

	σ_1		σ_2		σ_3	
1	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	9
2	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	4	$\longrightarrow$	4
3	$\longrightarrow$	3	$\longrightarrow$	3	$\longrightarrow$	3
4	$\longrightarrow$	4	$\longrightarrow$	8	$\longrightarrow$	8
5	$\longrightarrow$	5	$\longrightarrow$	5	$\longrightarrow$	7
6	$\longrightarrow$	10	$\longrightarrow$	10	$\longrightarrow$	10
7	$\longrightarrow$	7	$\longrightarrow$	7	$\longrightarrow$	1
8	$\longrightarrow$	8	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	2
9	$\longrightarrow$	9	$\longrightarrow$	9	$\longrightarrow$	5
10	$\longrightarrow$	6	$\longrightarrow$	6	$\longrightarrow$	6

On a ainsi vérifié que $\sigma = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$.

Commentaires

$\sigma_1=(6\ 10)$, $\sigma_2=(2\ 4\ 8)$, $\sigma_3=(1\ 9\ 5\ 7)$

Élément par élément.

2) Méthode : on examine les images successives des éléments.

$$1 \xrightarrow{\sigma} 9 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 7 \xrightarrow{\sigma} 1$$

$$2 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 8 \xrightarrow{\sigma} 2$$

3 est invariant par σ.

$$6 \xrightarrow{\sigma} 10 \xrightarrow{\sigma} 6$$

Images successives de 1

D'où le cycle $\sigma_3=(1\ 9\ 5\ 7)$

2 élément non utilisé dans σ_3

D'où le cycle $\sigma_2=(2\ 4\ 8)$

D'où le cycle $\sigma_1=(6\ 10)$. Tous les éléments ont maintenant été pris en compte.

3) On utilise $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_3)\ \varepsilon(\sigma_2)\ \varepsilon(\sigma_1)$.

Avec $\varepsilon(\sigma_3) = -1$, $\varepsilon(\sigma_2) = 1$ et $\varepsilon(\sigma_3) = -1$, il vient $\varepsilon(\sigma) = 1$.

Théorème essentiel 3

4) On a $\sigma_3 = (1\ 7) \circ (1\ 5) \circ (1\ 9)$ et $\sigma_2 = (2\ 8) \circ (2\ 4)$.

Il s'ensuit $\sigma = (1\ 7) \circ (1\ 5) \circ (1\ 9) \circ (2\ 8) \circ (2\ 4) \circ (6\ 10)$.

et son corollaire 2.

Produit de 6 transpositions, σ est une permutation paire.

Propriété 4.

5) Décomposition et signature de σ' :

$\sigma' = (1\ 3\ 5\ 7\ 9) \circ (2\ 8\ 6\ 4)$, et $\varepsilon(\sigma') = (-1)^4 \times (-1)^3 = -1$

$\sigma' = (1\ 9) \circ (1\ 7) \circ (1\ 5) \circ (1\ 3) \circ (2\ 4) \circ (2\ 6) \circ (2\ 8)$.

Les résultats sont donnés sans vérification.

Copyrighted material

Ex. 2

Utiliser la méthode d'existence de décomposition d'une permutation en produit de transpositions pour décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 4 & 3 & 8 & 7 & 10 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Comparer avec l'exercice prédédent.

Indications

La démonstration du théorème 1 fournit un algorithme de décomposition.

Solution

$(10\,6) \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 & 2 & 5 & 10 \end{pmatrix} = \sigma_1$.

On peut identifier σ_1 à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 4 & 8 & 7 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$(9\,5) \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_2$

$(8\,2) \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_3$.

puis $(7\,1) \circ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_4$ et enfin $(5\,1)\sigma_4 = (2\,4)$.

Avec $(5\,1) \circ (7\,1) \circ (8\,2) \circ (9\,5) \circ (10\,6) \circ \sigma = (2\,4)$, il vient :

$\sigma = (10\,6) \circ (9\,5) \circ (8\,2) \circ (7\,1) \circ (5\,1) \circ (2\,4)$, puis $\varepsilon(\sigma) = 1$.

Cette démarche a le mérite de mettre en œuvre un algorithme. Elle ne permet toutefois pas une écriture «à vue» d'une décomposition comme la démarche de l'exemple précédent.

Commentaires

$\sigma(10)=6$.

3, 6 et 10 sont invariants par σ_1.

$\sigma_1(9)=5$.

Même démarche itérée.

On regroupe les calculs.

Si les quatre premières transpositions semblent se lire directement sur l'expression de σ, les choses se gâtent ensuite.

II. Matrice de permutation

Ex. 3

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La matrice $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associée à cette permutation est celle qui a pour terme général $\delta_{i\,\sigma(j)}$.
Calculer le déterminant de P_σ.

Indications

Préciser les vecteurs-colonnes de P_σ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

δ_{ij} est l'usuel symbole de Kronecker : $\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{ij} = 0$ quand $i \neq j$.

Solution

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Les coordonnées du $j^{ème}$ vecteur-colonne de P_σ sont :

$$(\delta_{1\,\sigma(j)}, \delta_{2\,\sigma(j)}, \ldots, \delta_{n\,\sigma(j)}),$$

c'est-à-dire que les vecteurs-colonnes de P_σ sont $e_{\sigma(1)}, \ldots e_{\sigma(n)}$.

Alors $\det P_\sigma = \det_{\mathcal{B}}(e_{\sigma(1)}, \ldots e_{\sigma(n)})$ donne :

$$\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma) \det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = \varepsilon(\sigma).$$

Commentaires

Dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Propriété 16.

$\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ.

Copyright © 2019

Ex. 4

Déterminants circulants gauches

Calculer le déterminant C'_n de la matrice : $\Gamma'_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & & a_{n-2} \\ a_n & a_1 & \cdots & & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Indications

Les déterminants circulants droits ont été étudiés en section **E4**.

On se ramène à cette situation par une matrice de permutation.

Solution

Soit J la matrice de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$.

On a $\Gamma'_n = J\Gamma_n$ où Γ_n est une matrice circulante droite.

Le calcul de C_n fait l'objet de la propriété 30.

La signature de σ étant $(-1)^{(n-1)(n-2)/2}$, on a :

$$C'_n = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} C_n.$$

Commentaires

Pour tout remettre en bonne place.

Définition 17.

C_n déterminant de Γ_n.

Le nombre d'inversions est $(n-2)+(n-1)+\dots+1$.

Ex. 5

Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Indications

Exprimer les vecteurs-colonne de A à l'aide des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Reconnaître le déterminant d'une matrice de permutation après utilisation de la n-linéarité.

Solution

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a :

$$\det A = \det_{\mathcal{B}}(a_n e_n, \dots, a_2 e_2, a_1 e_1)$$

donc : $\det A = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \det_{\mathcal{B}}(e_n, \dots, e_2, e_1)$.

$\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est le déterminant de la matrice de la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ dont la signature est $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

En conclusion, $\det A = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_i$.

Commentaires

n-linéarité d'un déterminant.

Voir l'execice 3 précédent.

Par le nombre d'inversions.

Copyrighted material

III. Calculs de déterminants

Ex. 6

Étant donné $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \dots & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$ d'ordre n.

Indications

Établir une relation de récurrence double en développant suivant la dernière colonne.

On peut «deviner» un résultat (à justifier) sans passer par l'équation caractéristique d'une relation de récurrence linéaire double. L'unicité (avec les premiers termes connus) est assurée.

Solution

$\Delta_1 = \cos\theta$ et $\Delta_2 = 2\cos^2\theta - 1$. On suppose ensuite $n \geqslant 2$.

On obtient alors $\Delta_n = 2\cos\theta\,\Delta_{n-1} - D_{n-1}$, avec

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & \dots & 1 & 2\cos\theta \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ puis $D_{n-1} = \Delta_{n-2}$.

D'où la relation de récurrence $\Delta_n = 2\cos\theta\,\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$.

Avec $\Delta_1 = \cos\theta$ et $\Delta_2 = \cos 2\theta$, on peut espérer que $\Delta_n = \cos n\theta$.

Avec $2\cos\theta\cos(n-1)\theta = \cos n\,\theta + \cos(n-2)\theta$, il vient :

$$2\cos\theta\cos(n-1)\,\theta - \cos(n-2)\theta = \cos\theta$$

ce qui justifie $\Delta_n = \cos n\theta$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Commentaires

Développement selon le dernière colonne.

D_{n-1} est d'ordre $n-1$.
On développe D_{n-1} suivant la dernière ligne.

À prouver par récurrence.

$2\cos p\cos q = \cos(p+q) + \cos(p-q)$.

Ex. 7

Calculer le déterminant D_n de la matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(K)$ de terme général :

$$a_{ii} = 1 + x^2 \; ; \quad a_{ij} = x \text{ si } |i-j| = 1 \; ; \quad a_{ij} = 0 \text{ dans les autres cas.}$$

Indications

Calcul préliminaire de D_1 et D_2 ; ils donneront une idée du résultat à proposer en général.

On évite une récurrence linéaire double sur les D_n en faisant apparaître $D_n - D_{n-1}$.

Solution

1) $D_1 = 1 + x^2$; $D_2 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1 + x^2 + x^4$.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & \\ x & 1+x^2 & x & & (0) \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & 1+x^2 & x \\ & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Il vient : $D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x\Delta_{n-1}$ avec :

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} x & x & & & \\ 0 & 1+x^2 & x & (0) & \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & (0) & & 1+x^2 & x \\ & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Avec $\Delta_{n-1} = xD_{n-2}$, il vient $D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x^2D_{n-2}$

ou encore : $D_n - D_{n-1} = x^2(D_{n-1} - D_{n-2})$.

Il vient alors $D_n - D_{n-1} = x^{2(n-2)}(D_2 - D_1)$.

$D_2 - D_1 = x^4$ donne alors $D_n - D_{n-1} = x^{2n}$.

$D_n - D_1 = \sum_{k=2}^{n}(D_k - D_{k-1})$, donne finalement :

$$D_n = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}.$$

Commentaires

D_1 est un déterminant d'ordre 1.

Les indices donnent l'ordre des déterminants.

Développement selon la première colonne.

Développement selon la première ligne.

Récurrence linéaire simple sur $D_n - D_{n-1}$

Suite géométrique de raison x^2.

En utilisant à nouveau $D_1 = 1+x^2$.

Ex. 8

Déterminant et fonction affine

Soit $M = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $M(x) = [a_{ij} + x] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que $\det M(x)$ est un polynôme de degré au plus 1 en x.

Indications

Faire apparaître le vecteur xu, avec $u = (1, 1, \ldots, 1)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Solution

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $(c_1, \cdots, c_n)$ la famille des vecteurs-colonnes de la matrice M. Posons :

$$u = \sum_{i=1}^{n} e_i .$$

On a $D(x) = \det M(x) = \det_{\mathcal{B}}(c_1 + xu, \cdots, c_n + xu)$.

En retranchant le premier vecteur $c_1 + xu$ à chacun des $n-1$ autres, il vient :

$$D(x) = \det_{\mathcal{B}}(c_1 + xu, c_2 - c_1, \cdots, c_n - c_1),$$

donc :

$$D(x) = \det_{\mathcal{B}}(c_1, c_2 - c_1, \cdots, c_n - c_1) + x \det_{\mathcal{B}}(u, c_2 - c_1, \cdots, c_n - c_1).$$

Commentaires

Cette opération élémentaire ne change pas le déterminant.

Copyrighted material

Ex. 9

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ de deux façons différentes.

Indications

Deux méthodes sont aussi efficaces : développer suivant une colonne

ou se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Un nombre important de 0 rend aisé le développement suivant une colonne et permet aussi d'espérer un regroupement pour une telle matrice triangulaire par blocs.

Solution

1) En développant suivant la première colonne, on obtient :

$$D = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 16$$

et $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \times 16,$

donne alors $D = 2D_1 - 3D_2 = -96$.

Commentaires

Première méthode.

En développant dans les deux cas suivant la troisième colonne.

2) Autre méthode : $D = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

En échangeant les colonnes 2 et 4.

puis en effectuant la permutation (2 3 4) sur les lignes, on obtient :

$D = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ qui est un déterminant triangulaire par blocs.

Il vient ainsi $D = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -1 \times -6 \times -16 = -96.$

Ex. 10

Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$

Indications

Première opération on ajoute les n dernières colonnes à la première.

Ensuite on retranche la première ligne à toutes les autres.

Copyright

Solution

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$ et $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ la famille des vecteurs-colonnes de M.

On a $\det M = \det_{\mathcal{B}}(c_0, c_1, \ldots, c_n) = \det_{\mathcal{B}}\left(c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k, c_1, \ldots, c_n\right)$

donc $\det M = C \det M'$, avec $C = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & & & a_n \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & & & a_n \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & & & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 0 & a_n \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K}).$$

On a $\det M' = \det_{\mathcal{B}}(l_0, l_1 - l_0, \ldots, l_{n-1} - l_{n-2}, l_n - l_{n-1})$

$$\det M' = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & & & a_n \\ 0 & -a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & -a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n & -a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_1 & & & & \\ a_2 & -a_2 & & & (0) \\ & \ddots & -a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & a_n & -a_n \end{vmatrix}$$

en développant suivant la première colonne. D'où $\det M' = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} a_k$,

et finalement, $\det M = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \prod_{k=1}^{n} a_k$

Commentaires

Linéarité par rapport à la 1ere colonne.

Notons alors $(l_0, l_1, \ldots, l_n)$ la famille des vecteurs-lignes de M'.
$\det M' = \det_{\mathcal{B}}(l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}, l_n)$.

Déterminant d'une matrice triangulaire.

IV. Changement de base

Ex. 11

Soit f une forme n-linéaire altérnée non nulle sur $\mathbb{R}^n$.
Montrer qu'il existe une base $\mathfrak{b}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $f = \det_{\mathfrak{b}}$.

Indications

Une forme n-linéaire alternée est un multiple du déterminant dans une base donnée, la base canonique par exemple. Utiliser la formule de changement de base pour les déterminants.

Solution

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $f = \lambda \det_B$.

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ la base utilisée et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

$\alpha \det_B(e_1, \ldots, e_n) = \det_B(\alpha e_1, \ldots, e_n)$.

$\mathfrak{b} = (\alpha e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et $\det_B = \alpha \det_{\mathfrak{b}}$.

En choisissant $\alpha = \lambda^{-1}$, on a $\det_{\mathfrak{b}} = \lambda \det B = f$.

Commentaires

Par exemple, B base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Formule de changement de base.

Copyrighted material

Ex. 12

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
Montrer qu'il existe $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = R^{-1}AR$.

Indications

La similitude donnée s'écrit $PB = AP$. Séparer P en $P = U + iV$ avec U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour $x \in \mathbb{C}$ et U, V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $x \mapsto \det(U + xV)$ est une fonction polynôme.

Solution

Avec $P = U+iV$, U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $PB = AP$ se lit $UB+iVB = UA+iVA$.
Cela équivaut à $UB = AU$ et $VB = AV$.

Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a donc $(U + xV)B = A(U + xV)$.

La fonction polynôme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \det(U + xV)$ vérifie $f(i) \neq 0$.

Il existe alors $t \in \mathbb{R}$ tel que $\det(U + tV) \neq 0$, donc $U + tV$ inversible.

Alors, en posant $R = U+tV \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il vient $RB = AR$ donc $B = R^{-1}AR$.

Commentaires

A et B sont réelles, comme U et V.

$(U+xV)B=UB+xVB=AU+xAV=A(U+xV)$.

$f(i)=\det(U+iV)=\det P\neq 0$.

Si f s'annule en tout x réel, alors f est le polynôme nulpuisqu'il admet une infinité de racines.

Ex. 13

Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et φ_P l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\varphi_P(M) = P^{-1}MP$.
Calculer la trace et le déterminant de φ_P

Indications

Former la matrice de φ_P dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Classiquement les matrices élémentaires sont notées E_{ij} avec $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$. On exprime les produits $PE_{ij}P^{-1}$ à l'aide des termes de P et de P^{-1}.
La trace de φ_P s'exprimera à l'aide de $\mathrm{Tr}\, P$ et $\mathrm{Tr}\, P^{-1}$.

Solution

Posons $P = (p_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $Q = (q_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

1) Alors $PE_{kl} = \sum_{(i,j)} p_{ij}E_{ij}E_{kl} = \sum_{i=1}^{n} p_{ik}E_{il}$

puis $PE_{kl}P^{-1} = \sum_{i=1}^{n} p_{ik} \sum_{j=1}^{n} q_{lj}E_{ij}$, soit : $\varphi_P(E_{kl}) = \sum_{(i,j)} p_{ik}q_{lj}E_{ij}$.

La matrice de φ_P dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est alors :

$$A = \begin{pmatrix} q_{11}P & q_{21}P & \dots & q_{n1}P \\ q_{12}P & q_{22}P & \dots & q_{n2}P \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{1n}P & q_{2n}P & \dots & q_{nn}P \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{C}).$$

On en déduit $\mathrm{Tr}\,\varphi_P = \mathrm{Tr}\, P\, \mathrm{Tr}\, P^{-1}$.

Commentaires

$E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}$.

$\sum_{i,j} q_{ij}E_{il}E_{rj}=\sum_j q_{lj}E_{rj}$.

A est donnée par blocs.

$\mathrm{Tr}\,\varphi_P=\sum_k q_{kk}\,\mathrm{Tr}\, P$.

2) Remarquons que $A = BC$, avec B et C dans $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{C})$:

Produit par blocs.

$$B = \begin{pmatrix} q_{11}I_n & q_{21}I_n & \dots & q_{n1}I_n \\ q_{12}I_n & q_{22}I_n & \dots & q_{n2}I_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{1n}I_n & q_{2n}I_n & \dots & q_{nn}I_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} P & (0) & \dots & (0) \\ (0) & P & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \dots & (0) & P \end{pmatrix}.$$

$\det A = \det B \det C$, et $\det C = (\det P)^n$.

C est triangulaire par blocs.

La méthode du pivot de Gauss permet de transformer ${}^tP^{-1}$ en une matrice triangulaire $T = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & d_{nn} \end{pmatrix}$ telle que

C'est ${}^tP^{-1}$ qui apparaît dans B.

$$\det P^{-1} = \det {}^tP^{-1} = \prod_k d_{kk}.$$

En effectuant la même transformation sur les blocs de la matrice B, on obtient

$$\det B = \begin{vmatrix} d_{11}I_n & \dots & d_{1n}I_n \\ & \ddots & \vdots \\ & & d_{nn}I_n \end{vmatrix}.$$

Il s'ensuit $\det B = \prod_{k=1}^{n} d_{kk}^n = (\det P^{-1})^n$.

$\det(d_{kk}I_n) = d_{kk}^n$.

En conclusion, il vient $\det A = 1$.

Ex. 14

Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique, on considère l'endomorphisme f de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les réels λ pour lesquels $f - \lambda \mathrm{Id}$ n'est pas inversible.

2) Déterminer les noyaux des endomorphismes $f - \lambda \mathrm{Id}$ pour les λ obtenus.

3) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Indications

$f - \lambda \mathrm{Id}$ n'est pas inversible si et seulement si le déterminant de $A - \lambda I_3$ est nul.

Les trois noyaux sont de dimension 1 et supplémentaires.

Solution

1) $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$.

En multipliant la première colonne par 2, puis en additionnant la deuxième colonne à la première, il vient :

$$\det(A - \lambda I_3) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2(2-\lambda) & 0 & 4 \\ 2-\lambda & -4-\lambda & 12 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

On a donc $\det(A - \lambda I_3) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -4-\lambda & 12 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$.

Commentaires

Cette matrice est appelée la matrice caractéristique de A.

On fait ainsi apparaître $2-\lambda$ sur la première colonne.

Factorisation par $2-\lambda$ en première colonne et division par 2 en première ligne.

Copyrighted material

Ensuite, $\det(A-\lambda I_3)=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1&0&2\\0&-4-\lambda&10\\0&-2&5-\lambda\end{vmatrix}$ — En retranchant la première ligne à la seconde.

Enfin, $\det(A-\lambda I_3)=(2-\lambda)\big((\lambda+4)(\lambda-5)+20\big)=\lambda(2-\lambda)(\lambda-1)$. — Développement par la première colonne.

2) $(x,y,z)\in \operatorname{Ker} f \iff$

$$2x+4z=0,\quad 3x-4y+12z=0,\quad x-2y+5z=0 \quad \textbf{(1)}$$

(1) $\iff x=-2z,\ 2y=3z$.

Donc $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}(u)$, avec $u=(-4,3,2)$

$(x,y,z)\in \operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}) \iff$

$$x+4z=0,\quad 3x-5y+12z=0,\quad x-2y+4z=0 \quad \textbf{(2)}$$

(2) $\iff y=0,\ x+4z=0$.

Donc $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})=\operatorname{Vect}(v)$ avec $v=(-4,0,1)$.

$(x,y,z)\in \operatorname{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}) \iff$

$$4z=0,\quad 3x-6y+12z=0,\quad x-2y+3z=0 \quad \textbf{(3)}$$

(3) $\iff z=0,\ x-2y=0$.

Donc $\operatorname{Ker}(f-2\,\mathrm{Id})=\operatorname{Vect}(w)$, avec $w=(2,1,0)$.

3) Le déterminant de (u,v,w) est $\begin{vmatrix}-4&-4&2\\3&0&1\\2&1&0\end{vmatrix}$. — Dans la base canonique.

Ainsi, (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et, dans cette base, la matrice de f est la matrice diagonale $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. — $f(u)=0,\ f(v)=v,\ f(w)=2w$.

V. Déterminants et systèmes linéaires

Ex. 15

Soit $A=\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&(1)\\&&\ddots&\\&(1)&&\ddots\\&&&&a_n\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Étudier quand A est inversible et calculer alors son inverse.

Indications

L'inversibilité éventuelle de A s'étudie avec $\det A$. La présence des termes 1 incite à poser $a_i=1+b_i$.

On utilise l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.

Former la matrice inverse de A revient à chercher les vecteurs $f^{-1}(e_j)$, pour la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$.

Solution — **Commentaires**

Soit f l'$\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ de matrice A dans la base canonoque $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{K}^n$.

1) Posons $u=\sum_{k=1}^{n} e_k$ et $a_i=b_i+1$ pour $i\in[\![1,n]\!]$. Alors $f(e_i)=u+be_i$.

Si deux des b_i sont nuls, alors A n'est pas inversible. — Elle a deux colonnes égales.

Copyright

2) Si $b_k = 0$ et $b_j \neq 0$ pour $j \neq k$, on obtient — en retranchant la colonne k aux autres.

$$\det A = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots & 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & b_{k-1} & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 1 & b_{k+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & b_n \end{vmatrix} = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} b_j \neq 0.$$ Matrice triangulaire par blocs.

f est donc inversible. Avec $f(e_k) = u$, on a $f^{-1}(u) = e_k$.

Pour $j \neq k$, on a $f(e_j) = u + b_j e_j$, donc $f^{-1}(e_j) = \dfrac{1}{b_j}(e_j - e_k)$. $e_j = f^{-1}(u) + b_j f^{-1}(e_j)$.

$e_k = f^{-1}(u) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f^{-1}(e_j) = f^{-1}(e_k) + \sum_{j\neq k} \frac{1}{b_j}(e_j - e_k)$ donne — En reportant $f^{-1}(e_k)$ et $f^{-1}(e_j)$ pour $j \neq k$.

$$f^{-1}(e_k) = \Big(1 + \sum_{j\neq k} \frac{1}{b_j}\Big) e_k - \sum_{j\neq k} \frac{1}{b_j} e_j.$$

Il reste à reporter ces résultats en matrice de f^{-1}. — On en laisse le soin au lecteur.

3) Il reste enfin le cas où $p_n = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} b_j \neq 0$.

Supposons que A soit inversible. — Recherche de condition nécessaire.

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $f(e_j) = u + b_j e_j$ donne $f^{-1}(e_j) = \dfrac{1}{b_j}\big(e_j - f^{-1}(u)\big)$.

Il s'ensuit $f^{-1}(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f^{-1}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} e_i - \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i}\Big) f^{-1}(u)$

donc $K f^{-1}(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} e_i$ avec $K = 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{b_j}$.

Une condition nécessaire est alors $K \neq 0$. — $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre.

Et dans ce cas, on a $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $f^{-1}(e_j) = \dfrac{1}{b_j} e_j - \dfrac{1}{K b_j} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} e_i$. $f^{-1}(u) = \frac{1}{K} \sum \frac{1}{b_i} e_i$

Pour établir l'inversibilité de A, considérons $g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ défini par — Condition suffisante.

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad g(e_i) = \frac{1}{b_j} e_j - \frac{1}{K b_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} e_i.$$

Montrons pour cela que $f \circ g = \mathrm{Id}$. — Ce qui suffit pour que $g = f^{-1}$.

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $f \circ g(e_j) = \dfrac{1}{b_j} f(e_j) - \dfrac{1}{K b_j} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} f(e_i)$.

Donc $f \circ g(e_j) = \dfrac{1}{b_j}(u + b_j e_j) - \dfrac{1}{K b_j} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i}(u + b_i e_i)$.

Il s'ensuit $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $f \circ g(e_j) = e_j$ donc f est inversible, d'inverse g.

f^{-1} a pour matrice $A^{-1} = \mathrm{diag}\Big(\dfrac{1}{b_1}, \dots, \dfrac{1}{b_n}\Big) - \dfrac{1}{K} U$, où $U_{ij} = \dfrac{1}{b_i b_j}$. — $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Copyrighted material

Exercices

Niveau 1

Groupe symétrique

Ex. 1

Déterminer la signature de la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex. 2

Déterminer $\sigma \circ \sigma'$ et $\sigma' \circ \sigma$ pour

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ex. 3

Soit τ_1 et τ_2 des transpositions de $[\![1, n]\!]$. Montrer que : soit $\tau_1 \circ \tau_2 = \mathrm{Id}$, soit $(\tau_1 \circ \tau_2)^2 = \mathrm{Id}$, soit $(\tau_1 \circ \tau_2)^3 = \mathrm{Id}$.

Déterminants

Ex. 4

Calculer le déterminant de $A = \left[|i-j| \right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

Ex. 5

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} & & & \lambda_n \\ & (0) & \iddots & \\ & \iddots & (0) & \\ \lambda_1 & & & \end{vmatrix}$.

Inverse de matrice

Ex. 6

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et préciser son inverse.

Niveau 2

Groupe symétrique

Ex. 7

Décomposer en produit de cycles disjoints la permutation de $\mathcal{S}_7$ égale à :

$$(1,3,7,2) \circ (4,5,1) \circ (6,1,5,3,7) \circ (1,3,5,7,2).$$

Calculer de plusieurs manières sa signature.

Ex. 8

Étant donné A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Montrer que $\det M$ est réel positif.

Déterminants

Ex. 9

Étant donné $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, calculer le déterminant de

$$M = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} c & & & \\ & \ddots & (b) & \\ & (a) & \ddots & \\ & & & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

où $a_{ij} = a$ si $i > j$, $= b$ si $i < j$, $= c$ si $i = j$.

Ex. 10

Étant donné $(a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(b_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ des familles de scalaires, calculer le déterminant de la matrice

$$M = [\delta_{ij} + a_i b_j] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Ex. 11

Calculer le déterminant de l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $f : M \mapsto {}^tM$.

Ex. 12

Étant donné $(a, b) \neq (0, 0)$, calculer le déterminant D_n de $M_n = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$\begin{cases} m_{ij} = a + b & \text{si } i = j \\ m_{ij} = ab & \text{si } j = i + 1 \\ m_{ij} = 1 & \text{si } i = j + 1 \\ m_{ij} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ex. 13

Étant donné a et b scalaires, calculer le déterminant Δ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

Copyrighted material

Ex. 14

Soit A, B, C et D des matrices carrées d'ordre n. On suppose que C et D commutent.

Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$

Application : calculer $\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{vmatrix}$.

Ex. 15

1) Étant donné $p \in \mathbb{N}$, calculer le déterminant de

$$A_{n,p} = \left[C_{i+j+p}^{i} \right]_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

2) En déduire le déterminant de $\left[(i+j)! \right]_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}}$

Ex. 16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Calculer le déterminant D_n de $[1 + x_i^j]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

Ex. 17

Calculer le déterminant de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m_{ij} = \lambda^{|i-j|}$. Préciser le rang de M.

Systèmes linéaires

Ex. 18

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit inversible Calculer alors A^{-1}.

Ex. 19

Calculer l'inverse de la matrice A, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & (0) \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 2 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Ex. 20

Calculer l'inverse de la matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $a_{ii} = 1$, $a_{i\,i+1} = -2$, $a_{i\,i+2} = 1$ et $a_{ij} = 0$ dans les autres cas.

Ex. 21

Suivant les valeurs de $a \in \mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, résoudre le système d'inconnue :

$$(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \begin{cases} ax - 2y + 2z = 4 \\ x - ay + 3z = -2 \\ 5x - 8y + 12az = 8 \end{cases}$$

Avec éléments de solution

Groupe symétrique

Ex. 22

Étudier la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{12}$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 10 & 6 & 9 & 5 & 11 & 1 & 8 & 12 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comatrice

Ex. 23

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$.

1) Déterminer le rang de la comatrice N de M.

2) Déterminer la comatrice de N.

Niveau 3

Groupe symétrique

Ex. 24

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, montrer que $\Sigma = \{(1, i),\ i \in [\![2, n]\!]\}$, est un système générateur minimal de $\mathfrak{S}_n$.

Ex. 25

Soit n entier naturel, $n \geqslant 3$. Montrer que

$$T = \{(1, 2, i),\ i \in [\![3, n]\!]\}$$

est un système générateur de $\mathcal{A}_n$.

Ex. 26

Calculer la signature de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-p & n-p+1 & \cdots & n \\ p+1 & p+2 & \cdots & n & 1 & \cdots & p \end{pmatrix}$$

Copyrighted material

Déterminants

Ex. 27

Calculer le déterminant d'ordre n

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Ex. 28

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, avec $n \geqslant 2$, des endomorphismes f et g, et une base $\mathcal{B}$ de E. Pour $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ et $i \neq j$, on pose :

$$\alpha_{ij} = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, f(x_i), x_{i+1}, \ldots x_{j-1}, g(x_j), x_{j+1}, \ldots, x_n),$$

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que

$\sum_{i \neq j} \alpha_{ij} = k \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ et calculer k.

Ex. 29

Étant donné $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, calculer le déterminant de la matrice

$$A = [1 + a_i^j] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Ex. 30

Étant donné $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$, calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$$

Ex. 31

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice, dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -5 & -6 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Donner une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est plus simple.

Ex. 32

Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et φ_P l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\varphi_P(M) = PMP^{-1}$.

Calculer la trace et le déterminant de φ_P.

Ex. 33

Étant donné $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} x^2 - yz = a \\ y^2 - zx = b \\ z^2 - xy = c \end{cases}$

Ex. 34

Soit $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que cette famille est libre si et seulement si il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\det\left(f_i(x_j)\right) \neq 0$.

Avec éléments de solution

Ex. 35

Montrer que $\mathbb{T}' = \left\{(i, i+1),\ 1 \leqslant i \leqslant n-1\right\}$ est un système générateur de $\mathcal{S}_n$, et en déduire que $\Sigma = \left\{(1, 2), (1, 2, \ldots, n)\right\}$ en est un aussi.

Ex. 36

Soit A et M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $\operatorname{rg} M = 1$.

Montrer que $\det\left((A+M)(A-M)\right) \leqslant \det(A^2)$.

Ex. 37

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(A+M) = \det A + \det M.$$

2) Trouver les couples $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tels que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(A+M) = \det(B+M).$$

Copyrighted material

Indications

Ex. 7

Former la composée des quatre permutations et se reporter à l'exemple 5 du cours.

Ex. 8

M étant donnée par blocs, on cherche à se ramener à une matrice triangulaire par blocs.

Les opérations sur les colonnes (respectivement sur les lignes) s'expriment par une multiplication à droite (respectivement à gauche) par une matrice. Il est raisonnable de tenter de faire apparaître $A + iB$ et $A - iB$.

Ex. 9

Si $a \neq b$, utiliser le résultat de l'exercice 8 de mise en œuvre.

Si $a = b$, utiliser le vecteur $u = \sum_{i=1}^{n} e_i$ et remarquer que le premier vecteur colonne est $(c - a)e_1 + au$.

Ex. 10

En utilisant les colonnes de M développer $\det M$ en somme de 2^n déterminants dont $n + 1$ au plus sont non nuls.

Ex. 11

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est somme directe de l'ensemble des matrices symétriques et de l'ensemble des matrices antisymétriques.

Ex. 12

Établir une relation de récurrence entre les $D_n = \det A_n$ en développant suivant la dernière colonne.

Ex. 13

Mettre en évidence des blocs carrés d'ordre 2 et se ramener à un déterminant triangulaire par blocs.

Ex. 14

Si D est inversible, utiliser $\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$.

Sinon, utiliser $D + \lambda I_n$ pour se ramener au cas précédent.

Ex. 15

Utiliser les vecteurs-colonnes de $A_{n,p}$ et la formule du triangle de Pascal.

Ex. 16

Compléter par une colonne de $n + 1$ termes 1 avec des 0 pour compléter en un déterminant d'ordre $n + 1$ et exploiter les déterminants de Vandermonde.

Ex. 17

Multiplier M par la matrice diagonale

$$D = \operatorname{diag}(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}).$$

Ex. 18

Pour calculer $\det A$, ajouter les $n - 1$ dernières lignes à la première.

Lorsque $\det A \neq 0$, on peut associer à la matrice A le système de Cramer : $AX = Y$.

Ex. 19

La matrice est inversible, on se ramène à un système de Cramer.

Ex. 20

Pour résoudre le système de Cramer, on peut utiliser la matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure à termes égaux à 1.

Les systèmes $AX = B$ et $(QA)X = QB$ sont équivalents.

Ex. 21

Quand le système est de Cramer, on peut utiliser les formules de Cramer pour donner la solution

Ex. 22

Pour la signature, on détermine le nombre d'inversions.

On décompose σ en produit de cycles disjoints puis en produit de transpositions.

Ex. 23

Montrer qu'une transposition $(x\ y)$ s'exprime à l'aide de $(1\ x)$ et $(1\ y)$.

Ex. 24

On se remène à prouver que le produit de transpositions $(1\ x)$, $(1\ y)$ s'exprime à l'aide de $(1\ 2x)$ et $(1\ 2\ y)$.

Ex. 25

Former la matrice de la permutation σ (voir l'exercice 3 de mise en œuvre).

Ex. 26

Il s'agit d'un déterminant circulant (droit).

Copyrighted material

Ex. 27

Montrer que $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i \neq j} \alpha_{ij}$ est une forme n-linéaire alternée. Examiner ce que vaut cette expression pour les vecteurs de $\mathcal{B}$.

Ex. 28

Ajouter une colonne de termes tous égaux à 1 (et une ligne...) pour faire apparaître des déterminants de Vandermonde.

Ex. 29

Il manque la colonne des puissances troisièmes pour voir un déterminant de Vandermonde. On complète en un déterminant d'ordre 5, polynôme de degré 4 en x.

Ex. 30

La méthode appliquée à l'exercice 12 de mise en œuvre est exploitée.

Ex. 31

Exprimer $\varphi_P(E_{k\,l})$ pour les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ex. 32

1) On examine si toutes les matrices extraites d'ordre $n-1$ sont de rang $n-1$.

2) Utiliser ${}^tN\,M = (\det M) I_n$.

Ex. 33

Avec $M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, le système s'écrit com $M = A$.

Ex. 34

Montrer la condition nécessaire par contraposée.

Pour la condition suffisante, procéder par récurrence.

Ex. 35

1) Il suffit de prouver que toute transposition $(1\ i)$ s'exprime à l'aide de $(1\ i)$ et $(1\ i-1)$.

2) Former $C^k \circ (1\ 2) \circ C^{-k}$ avec $C = (1\ 2\ \dots\ n)$.

Ex. 36

Commencer par le cas où $m_{ij} = \delta_{1\,i}\delta_{1\,j}$ pour exprimer $\det(A+M)$ et $\det(A-M)$ à l'aide de $\det A$ et d'un cofacteur de A.

Ex. 37

Une condition nécessaire vient de $M = A$.

Deux démarches possibles ensuite : soit montrer que le rang de A est 0 soit, si $\operatorname{rg} A \neq 0$, exhiber une matrice M qui conduit à une contradiction

Copyrighted material

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

On utilise la méthode pratique expliquée en exemple 7 du cours.

terme étudié	7	5	6	2	4	3	1
nombre associé	6	4	4	1	2	1	

La somme des nombres associés est 18, la permutation σ est donc paire.

Ex. 2

On vérifie aisément que $\sigma \circ \sigma'$ est la transposition $(2\ 5)$ et que $\sigma' \circ \sigma$ est la transposition $(3\ 4)$.

Ex. 3

Soit $\tau_1 = (i\ j)$ et $\tau_2 = (u\ v)$.

1) Si $\{i, j\} = \{u, v\}$, alors $\tau_1 \circ \tau_2 = \mathrm{Id}$.

2) Si $\mathrm{Card}\{i, j, u, v\} = 3$, alors $i = u$ par exemple, avec i, j, v, deux à deux distincts.

Soit $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2$

$$\begin{array}{ccccc} & & \tau_2 & & \tau_1 \\ i & \longrightarrow & v & \longrightarrow & v \\ j & \longrightarrow & j & \longrightarrow & i \\ v & \longrightarrow & i & \longrightarrow & j \end{array}$$

$\sigma = (i\ v\ j)$. On vérifie sans peine que $\sigma^3 = \mathrm{Id}$.

3) Si $\mathrm{Card}\{i, j, u, v\} = 4$, alors $\{i, j\} \cap \{u, v\} = \emptyset$.

On sait que des cycles de supports disjoints commutent. Alors $\sigma^2 = \tau_1^2 \circ \tau_2^2 = \mathrm{Id}$.

Ex. 4

Notons $(c_1, \ldots, c_n)$ la famille des vecteurs-colonnes de A dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$. On a :

$$\det A = \det_{\mathcal{B}}(c_1 + c_n, c_2, \ldots, c_n) = (n-1)\det A', \quad \text{où } A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & n-2 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons $(l_1, \ldots, l_n)$ la famille des vecteurs-lignes de A'. On a

$$\det A' = \det_{\mathcal{B}}(l_1, l_2 - l_1, \ldots, l_n - l_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ \vdots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

En développant suivant la première colonne, puis en ajoutant la première ligne à chacune des autres, $\det A'$ est égal au déterminant d'ordre $n-1$:

$$\begin{vmatrix} -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & -2 & \cdots & \cdots & -2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-2)^{n-2}$$

En conclusion, le déterminant de A est égal à $(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1)$.

Copyrighted material

Ex. 5

On échange les colonnes c_k et c_{n-k}, pour $k \leqslant \dfrac{n}{2}$.

Après ces opérations élémentaires, on est ramené au déterminant de la matrice diagonale $\operatorname{diag}(\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_1)$.

Si n est pair, on a effectué $\dfrac{n}{2}$ échanges de colonnes. Si n est impair, on a effectué $\dfrac{n-1}{2}$ échanges de colonnes.

En conclusion, le déterminant vaut $\dfrac{n}{2}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\lambda_k$ si n est pair et $\dfrac{n-1}{2}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\lambda_k$ si n est impair.

Ex. 6

On a $\det A = 18$, donc A est inversible, par la règle de Sarrus par exemple.

$v = f(u)$ équivaut à $V = AX$, où $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Les matrices sont écrites dans la base $\mathscr{B}$.

$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 3x + y + 2z = b \\ 2x + 3y + z = c \end{cases}$ équivaut successivement à $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ -5y - 7z = b - 3a \\ -y - 5z = c - 2a \end{cases}$ avec des manipulations classiques et

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 18z = 7a + b - 5c \\ -y - 5z = c - 2a \end{cases} \quad \text{d'où} \quad A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Les derniers calculs intermédiaires sont laissés au lecteur.

Niveau 2

Ex. 7

Posons $\sigma_1 = (1\ \ 3\ \ 5\ \ 7\ \ 2)$, $\sigma_2 = (6\ \ 1\ \ 5\ \ 3\ \ 7)$, $\sigma_3 = (4\ \ 5\ \ 1)$, $\sigma_4 = (1\ \ 3\ \ 7\ \ 2)$.

Avec $\varepsilon(\sigma_1) = (-1)^4$, $\varepsilon(\sigma_2) = (-1)^4$, $\varepsilon(\sigma_3) = (-1)^2$, $\varepsilon(\sigma_4) = (-1)^3$, on a $\varepsilon(\sigma) = -1$.

	σ_1		σ_2		σ_3		σ_4	
1	$\longrightarrow$	3	$\longrightarrow$	7	$\longrightarrow$	7	$\longrightarrow$	2
2	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	5	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	3
3	$\longrightarrow$	5	$\longrightarrow$	3	$\longrightarrow$	3	$\longrightarrow$	7
4	$\longrightarrow$	4	$\longrightarrow$	4	$\longrightarrow$	5	$\longrightarrow$	5
5	$\longrightarrow$	7	$\longrightarrow$	6	$\longrightarrow$	6	$\longrightarrow$	6
6	$\longrightarrow$	6	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	4	$\longrightarrow$	4
7	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	1

Ainsi, σ est la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

On peut en donner une décomposition en produit de cycles disjoints : $\sigma = (1\ 2\ 3\ 7) \circ (4\ 5\ 6)$, ce qui permet un autre calcul de $\varepsilon(\sigma)$ avec $\varepsilon\big((1\ 2\ 3\ 7)\big) = -1$ et $\varepsilon\big((4\ 5\ 6)\big) = 1$. On a $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Ex. 8

Remarque préliminaire. Soit C et D dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ conjuguées : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $c_{ij} = \overline{d_{ij}}$.

Alors, les déterminants de C et de D sont conjugués. En effet, les développements de $\det C$ et $\det D$ se font avec des opérations algébriques (produits et sommes) avec des termes conjugués. C'est le cas pour $A + iB$ et $A - iB$.

Soit $U = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ iI_n & I_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix}$ (matrices d'opérations élémentaires).

On a $MU = \begin{pmatrix} A + iB & B \\ iA - B & A \end{pmatrix}$ puis $VMU = \begin{pmatrix} A + iB & B \\ 0 & A - iB \end{pmatrix}$.

Avec $\det U = \det V = 1$ (matrices triangulaires par blocs carrés), il vient :

$\det M = \det(A + iB)\det(A - iB)$ donc $\det M \geqslant 0$ puisque c'est un produit de nombres complexes conjugués.

Copyrighted material

Ex. 9

1) Examinons le cas où $a \neq b$. Avec les notations de l'exemple **20**, on a $\det M(x) = \lambda x + \det M$.

Il vient $\det M(-a) = -\lambda a + \det M$ et $\det M(-b) = -\lambda b + \det M$.

Or $M(-a)$ (resp. $M(-b)$) est une matrice triangulaire de termes diagonaux tous égaux à $c-a$ (resp. $c-b$).

Il s'ensuit $\begin{cases} -\lambda a + \det M = (c-a)^n \\ -\lambda b + \det M = (c-b)^n \end{cases}$ On en déduit $\det M = \dfrac{b(c-a)^n - a(c-b)^n}{b-a}$.

2) Supposons $a = b$. Notons $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Soit $u = \sum_{i=1}^{n} e_i$ et $c_1, \dots, c_n$ les vecteurs-colonnes de M. Ces vecteurs-colonnes sont $(c-a)e_1 + au, (c-a)e_2 + au, \dots, (c-a)e_n + au$. On a alors $\sum_{i=1}^{n} c_i = \big(c + (n-1)a\big)u$ d'où

$\det M = \big(c + (n-1)a\big) \det_{\mathcal{B}}(u, c_2, \dots, c_n) = \big(c + (n-1)a\big) \det_{\mathcal{B}}(u, c_2 - au, \dots, c_n - au)$

$\det M = \big(c + (n-1)a\big)(c-a)^{n-1} \det_{\mathcal{B}}(u, e_2, \dots, e_n) = \big(c + (n-1)a\big)(c-a)^{n-1}$.

Ex. 10

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Considérons le vecteur $u = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$.

On a $\det M = \det_{\mathcal{B}}(e_1 + b_1 u, e_2 + b_2 u, \dots, e_n + b_n u)$

La n-linéariré de la forme $\det_{\mathcal{B}}$ permet d'écrire $\det M$ comme somme de 2^n déterminants.

Sauf $n+1$ d'entre eux, ce sont des déterminants de n vecteurs dont deux au moins sont liés (multiples de u) et qui sont donc nuls.

Il reste $\det M = \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n) + \sum_{j=1}^{n} b_j \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{j-1}, u, e_{j+1}, \dots, e_n)$. Avec $u = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$

il vient $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{j-1}, u, e_{j+1}, \dots, e_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{j-1}, e_k, e_{j+1}, \dots, e_n) = a_j$

Ainsi, on a $\det M = 1 + \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$.

Ex. 11

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ les sous-espaces, supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, formés respectivement des matrices symétriques et antisymétriques.

Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée, pour les $\dfrac{n(n+1)}{2}$ premiers termes par les vecteurs d'une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et pour les $\dfrac{n(n-1)}{2}$ autres par ceux d'une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Dans une telle base, la matrice de f est $M = \begin{pmatrix} I_p & (0) \\ (0) & -I_q \end{pmatrix}$ où $p = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $q = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

On a alors $\det f = \det M = (-1)^q$.

Ex. 12

Développons D_n suivant la dernière colonne. Le cofacteur (n, n), coefficient de $a+b$, est D_{n-1}.

Le cofacteur $(n-1, n)$, coefficient de ab, est $\gamma_{n-1,n} = -\begin{vmatrix} & & & 0 \\ & M_{n-2} & & \vdots \\ & & & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

On a donc $\gamma_{n-1,n} = -\det M_{n-2} = -D_{n-2}$. Il s'ensuit $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

En posant $D_0 = 1$, cette dernière relation est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Copyrighted material

L'équation caractéristique de cette relation de récurrence linéaire double est $x^2 - (a+b)x + ab = 0$, de racines apparentes a et b.

Premier cas : $a \neq b$.

Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = \lambda a^n + \mu b^n$. Avec $D_0 = 1$ et $D_1 = a + b$, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda a + \mu b = a + b \end{cases} \text{ Il vient } \lambda = \frac{a}{a-b} \text{ et } \mu = \frac{b}{b-a} \text{ d'où } D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

Deuxième cas : $a = b$.

Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = (\lambda n + \mu)a^n$. Avec $D_0 = 1$ et $D_1 = 2a$, compte tenu de $a \neq 0$, on obtient :

$$\begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda + \mu = 2 \end{cases} \text{ Il vient } \lambda = \mu = 1 \text{ d'où } D_n = (n+1)a^n.$$

Ex. 13

Posons $J = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $U = aJ$, $V = bJ$. On a donc $A = \begin{pmatrix} U & V \\ V & U \end{pmatrix}$.

En notant I_2 la matrice unité d'ordre 2, on a $B = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} U & V \\ U+V & U+V \end{pmatrix}$ et $\det B = \det A$.

Soit $C = B \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U-V & V \\ 0 & U+V \end{pmatrix}$. On a $\det C = \det B$, d'où $\det C = \det A$.

Or $\det C = \det(U-V)\det(U+V) = \det\big((a-b)J\big)\ \det\big((a+b)J\big) = (a-b)^2(a+b)^2(\det J)^2$.

En conclusion, $\det A = (a^2 - b^2)^4$.

Ex. 14

1) Supposons D inversible. Nous avons $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ CD - DC & I_n \end{pmatrix}$. Avec $CD = DC$, et $\begin{vmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{vmatrix} = \det D \det(D^{-1}) = 1$, il vient : $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{vmatrix} = \det(AD - BC)$.

2) Étudions le cas où D n'est pas inversible. $\det(D + \lambda I_n)$ est un polynôme de degré n en λ. Il admet au plus n racines. Ainsi, $D + \lambda I_n$ est inversible pour une infinité de λ.

En outre C et $D + \lambda I_n$ commutent. En utilisant la première partie, il vient :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D + \lambda I_n \end{vmatrix} = \det\big(A(D + \lambda I_n) - BC\big)$$

Ces deux polynômes en λ prennent la même valeur pour une infinité de λ. Ils sont donc égaux et prennent en particulier la même valeur en 0 ; d'où $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)$.

3) Exemple. Il est aisé de vérifier que $D = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -z & t \\ -t & -z \end{pmatrix}$ commutent.

Nous avons $AD = (x^2 + y^2)I_2$ et $BC = -(z^2 + t^2)I_2$.

Avec $AD - BC = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)I_2$, il vient $\det(AD - BC) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2$.

Ex. 15

1) Notons $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ la famille des vecteurs-colonnes de $A_{n,p}$. Avec $C^i_{i+j+p} - C^i_{i+j-1+p} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ C^{i-1}_{i+j-1+p} & \text{si } i > 0 \end{cases}$

on a $\det_{\mathcal{B}}(v_0, v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ C^1_{p+1} & C^0_{p+1} & C^0_{p+2} & \cdots & C^0_{p+n} \\ C^2_{p+2} & C^1_{p+2} & C^1_{p+3} & \cdots & C^1_{p+1+n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ C^n_{p+n} & C^{n-1}_{p+n} & C^{n-1}_{p+n+1} & \cdots & C^{n-1}_{p+2n-1} \end{vmatrix}$

Copyrighted material

En développant suivant la première ligne, il vient $\det A_{n,p} = \det A_{n-1,p+1}$.

Par récurrence, il vient $\det A_{n,p} = \det A_{0,n+p} = 1$.

2) Dans le cas particulier où $p = 0$, on a encore $\det A_{n,0} = 1$.

Mais $\det A_{n,0} = \det\left[\dfrac{(i+j)!}{i!j!}\right] = \displaystyle\prod_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\prod_{j=0}^{n}\frac{i}{j!}\ \det[(i+j)!]$. Il s'ensuit $\det[(i+j)!] = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k!\right)^2$.

Ex. 16

Rappelons le résultat concernant les déterminants de Vandermonde :

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \det[x_i^{j-1}] = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i).$$

Considérons alors la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & \dots & 1+x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1+x_n & \dots & 1+x_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(K)$. Alors $D_n = \det M$.

En retranchant la première colonne aux autres, il vient $D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$.

En notant que $(1,-1,\dots,-1) = (2,0,\dots,0) - (1,1,\dots,1)$, la linéarité par rapport à la première ligne donne

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}. \quad \text{Alors } D_n = 2\begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire $D_n = 2\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right)V_n(x_1,\dots,x_n) - V_{n+1}(1,x_1,\dots,x_n)$.

Avec $V_{n+1}(1,x_1,\dots,x_n) = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x_k-1)\right)V_n(x_1,\dots,x_n)$, il vient $D_n = \left(2\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n}(x_k-1)\right)V_n(x_1,\dots,x_n)$.

Ex. 17

$M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \dots & \lambda^{n-1} \\ \lambda & 1 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \lambda^2 & \lambda & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \\ \lambda^{n-1} & \lambda^{n-2} & \dots & \lambda^2 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$. Avec $D = \operatorname{diag}(1,\lambda,\dots,\lambda^{n-1})$, on a

$MD = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & \lambda^4 & \dots & \lambda^{2n-4} & \lambda^{2n-2} \\ \lambda & \lambda & \lambda^3 & \dots & \lambda^{2n-3} & \lambda^{2n-1} \\ \lambda^2 & \lambda^2 & \lambda^2 & \dots & & \\ \vdots & & & & & \\ \lambda^{n-1} & \lambda^{n-1} & \lambda^{n-1} & \dots & \lambda^{n-1} & \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$. Sur la ligne i, les i premiers termes sont égaux.

Copyrighted material

À la première colonne, on retranche la seconde, puis à la seconde on retranche la troisième... ce qui revient à multiplier MD à droite par $J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & \ddots & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & \ddots \\ & & & -1 \quad 1 \end{pmatrix}$.

Alors, MDJ est alors une matrice triangulaire supérieure, de termes diagonaux :

$$\left(1-\lambda^2, \lambda-\lambda^3, \lambda^2-\lambda^4, \ldots, \lambda^{n-2}-\lambda^n, \lambda^{n-1}\right).$$

On a donc $\det(MDJ) = \lambda^{n-1}\prod_{k=2}^{n}(\lambda^{n-k-2}-\lambda^{n-k}) = (1-\lambda^2)^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\lambda^{k-1}$.

Or $\det J = 1$ et $\det D = \prod_{k=1}^{n}\lambda^{k-1}$. Il s'ensuit $\det M = (1-\lambda^2)^{n-1}$.

Ex. 18

En ajoutant les lignes $L_2, L_3, \ldots, L_n$ à la ligne L_1 : $L_1 \longleftarrow \sum_{i=1}^{n} L_i$,

puis en factorisant $a+(n-1)b$ dans la ligne L_1, il vient : $\det A = \big(a+(n-1)b\big)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ b & a & b & \ldots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \ldots & \ldots & b & a \end{vmatrix}$.

Pour $i = 2, 3, \ldots, n$, $L_i \longleftarrow L_i - bL_1$ donne $\det A = \big(a+(n-1)b\big)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a-b \end{vmatrix}$.

Le déterminant qui reste à calculer étant celui d'une matrice triangulaire, il vient : $\det A = \big(a+(n-1)b\big)(a-b)^{n-1}$

A est donc inversible si et seulement si $a \neq b$ et $a+(n-1)b \neq 0$ (n est supposé $\geqslant 2$).

- Calcul de A^{-1} Considérons le système (S) : $AX = Y$ équivalent à $X = A^{-1}Y$

(S) est équivalent à :

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + \cdots + bx_n = y_1 & (E_1) \\ bx_1 + ax_2 + bx_2 + \cdots + bx_n = y_2 & (E_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ bx_1 + \cdots + bx_{n-1} + ax_n = y_n & (E_n) \\ x_1 + \cdots + x_n = \dfrac{1}{a+(n-1)b}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) & (E_{n+1}) \end{cases}$$

(l'équation supplémentaire étant la somme des n équations de (S)).

On obtient encore un système équivalent en remplaçant chaque équation (E_i) par $(E_i) - b(E_{n+1})$, et il en résulte :

$$\text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n \quad (a-b)x_i = y_i - \frac{b}{a+(n-1)b}(y_1 + \cdots + y_n)$$

soit $x_i = \dfrac{1}{(a-b)\big(a+(n-1)b\big)}\cdot\left[\big(a+(n-2)b\big)y_i - b\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} y_i\right]$

En conséquence, on a : $A^{-1} = \dfrac{1}{(a-b)\big(a+(n-1)b\big)}\begin{pmatrix} a+(n-2)b & & & \\ & \ddots & & (-b) \\ & (-b) & \ddots & \\ & & & a+(n-2)b \end{pmatrix}$.

Copyrighted material

Ex. 19

$\det A = 1$ donc A est inversible. À la matrice A, on associe le système de Cramer :

$$(S):\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 &= y_1 & E_1\\ x_2+2x_3+x_4 &= y_2 & E_2\\ \cdots\ \cdots & \cdots & \\ x_{n-2}+2x_{n-1}+x_n &= y_{n-2} & E_{n-2}\\ x_{n-1}+2x_n &= y_{n-1} & E_{n-1}\\ x_n &= y_n & E_n \end{cases}$$

Pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, effectuons sur les équations la combinaison linéaire symbolisée par :

$E_i \longleftarrow \sum_{k=i}^{n}(-1)^{k+i}E_k$. Il vient : $\begin{cases} x_i + x_{i+1} = \sum_{k=i}^{n}(-1)^{k+i}y_k & 1 \leqslant i \leqslant n-1\\ x_n = y_n \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1+x_2 = y_1-y_2+y_3+\cdots+(-1)^{n+1}y_n & E'_1\\ -x_2-x_3 = -y_2+y_3+\cdots+(-1)^{n+1}y_n & E'_2\\ x_3+x_4 = y_3+\cdots+(-1)^{n+1}y_n & \\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \\ (-1)^n(x_{n-1}+x_n) = (-1)^n y_{n-1}+(-1)^{n+1}y_n & E'_{n-1}\\ (-1)^{n+1}x_n = (-1)^{n+1}y_n & E'_n \end{cases}$$

D'où en effectuant les combinaisons linéaires $E_i \longleftarrow \sum_{k=i}^{n} E'_k$:

$$\begin{cases} x_1 = y_1-2y_2+3y_3+\cdots+(-1)^{n+1}ny_n\\ x_2 = y_2-2y_3+(-1)^n(n-1)y_n\\ \cdots\ \cdots \quad \cdots\ \cdots\\ x_{n-1} = y_{n-1}-2y_n\\ x_n = y_n \end{cases}$$

Il en résulte : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \cdots & (-1)^n(n-1) & (-1)^{n+1}n\\ 0 & 1 & -2 & 3 & \cdots & (-1)^{n-1}(n-2) & (-1)^n(n+1)\\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & & (-1)^{n-1}(n-2)\\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots\\ \vdots & & (0) & & \ddots & & \vdots\\ & & & & & & \\ \vdots & & & & & 1 & -2\\ 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ex. 20

1) Soit $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 2\\ 1 & -a & 3\\ 5 & -8 & 12a \end{pmatrix}$. À la colonne C_2 on ajoute $a \times C_1$ et à la colonne C_3 on retranche $3 \times C_1$.

Il vient alors $\det A = \begin{vmatrix} a & a^2-2 & 2-3a\\ 1 & 0 & 0\\ 5 & 5a-8 & 12a-15 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a^2-2 & 2-3a\\ 5a-8 & 12a-15 \end{vmatrix} = -12a^3+58a-46.$

1 est valeur d'annulation apparente de $\det A$, d'où la factorisation $\det A = -2(a-1)(6a^2+6a-23)$

et $\det A = 0$ pour $a \in \left\{1, \frac{-3-7\sqrt{3}}{6}, \frac{-3+7\sqrt{3}}{6}\right\}$.

Copyrighted material

2) Si $\det A \neq 0$, c'est un système de Cramer. Utilisons les formules de Cramer :

$$N_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & -a & 3 \\ 8 & 8 & 12a \end{vmatrix} = -16 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & 3 \\ 1 & 2 & 3a \end{vmatrix} = -16(3a^2 + 2a - 5) = -16(a-1)(3a+5)$$

$$N_y = \begin{vmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 8 & 12a \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 12a \end{vmatrix} = -24(3a^2 + a - 4) = -24(a-1)(3a+4)$$

$$N_z = \begin{vmatrix} a & -2 & 4 \\ 1 & -a & -2 \\ 5 & -8 & 8 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -4(2a^2 - a - 1) = -4(a-1)(2a+1).$$

En divisant N_x, N_y et N_z par $\det A$, on obtient :

$$x = \frac{8(3a+5)}{6a^2+6a-23}, \quad y = \frac{12(3a+4)}{6a^2+6a-23}, \quad z = \frac{2(2a+1)}{6a^2+6a-23}.$$

3) Si $\det A = 0$, alors $a^2 - 2 \neq 0$. Pour réduire les calculs, appliquons la méthode du pivot de Gauss :
le système s'écrit $(L) : E_1 = 0 \quad E_2 = 0 \quad E_3 = 0$. Il est équivalent à :

$$(L') : E_2 = 0 \quad E_1 - aE_2 = 0 \quad E_3 - 5E_2 = 0 \; : \; \begin{cases} x - ay + 3z = -2 \\ (a^2-2)y + (2-3a)z = 4 + 2a \\ (5a-8)y + (12a-15)z = 18 \end{cases}$$

Le système $(L') : E'_1 = 0 \quad E'_2 = 0 \quad E'_3 = 0$, équivaut à (L'') :

$$E'_1 = 0, E'_2 = 0, (5a-8)E'_2 - (a^2-2)E'_3 = 0 \; \begin{cases} x - ay + 3z = -2 \\ (a^2-2)y + (2-3a)z = 4 + 2a \\ (-12a^3 + 58a - 46)z = -8a^2 + 4a + 4 \end{cases}$$

Compte tenu de $-12a^3 + 58a - 46 = 0$, la $3^{\text{ème}}$ équation donne $0 = -4(a-1)(2a+1)$.

Pour $a \in \left\{ \dfrac{-3-7\sqrt{3}}{6}, \dfrac{-3+7\sqrt{3}}{6} \right\}$, $S(L) = S(L'') = \varnothing$

Pour $a = 1$, $S(L) = S(L_p)$ avec $(L_p) : \begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ -y - z = 6 \end{cases}$

Les solutions de (L_p) sont $\{(-4z - 8, -z - 6, z),\ z \in \mathbb{K}\}$
c'est-à-dire la droite affine $\{(-8, -6, 0) + z(-4, -1, 1),\ z \in \mathbb{K}\}$

Ex. 21

1) Calcul direct de la signature

terme étudié	3	10	6	9	5	11	1	8	12	4	7	2
nombre associé	2	8	4	6	3	5	0	3	3	1	1	0

La somme des nombres associés est 36, la permutation σ est donc paire.

2) Décomposition en produit de cycles. On obtient sans peine : $\sigma = (1\ 3\ 6\ 11\ 7) \circ (2\ 10\ 4\ 9\ 12)$.
σ est le produit de deux cycles de longueurs impaires, donc des cycles pairs et σ est une permutation paire.

3) Le lecteur pourra décomposer σ en produit de transpositions, en application du théorème 8, à partir de la donnée initiale de σ.

Ex. 22

1) Si M est inversible, ${}^t\!N\,M = (\det M) I_n$ montre que N est inversible, donc de rang n.
Si $\operatorname{rg} M < n-1$, toutes les matrices extraites d'ordre $n-1$ sont de déterminant nul, donc $N = 0$.
Si $\operatorname{rg} M = n-1$, on a $\det M = 0$ et il y a une matrice extraite d'ordre $n-1$ de M qui est de rang $n-1$; alors N a un terme non nul : $N \neq 0$.
En identifiant une matrice et l'endormorphisme canoniquement associé, ${}^t\!N\,M = 0$ équivaut à $\operatorname{Im} M \subset \operatorname{Ker}\,{}^t\!N$.
Il s'ensuit $\operatorname{rg} M \leqslant n - \operatorname{rg}\,{}^t\!N$, donc $\operatorname{rg} N \leqslant 1$. Avec $N \neq 0$, il vient $\operatorname{rg} N = 1$.

Copyrighted material

2) Le cas $n = 2$ est immédiat : $\operatorname{Com} N = M$. On suppose alors $n \geqslant 3$.

Si $\operatorname{rg} M = n$, ${}^t N M = (\det M) I_n$ donne $N = (\det M)\,{}^t M^{-1}$, puis $\det N = (\det M)^{n-1}$.

On a aussi $\operatorname{Com} N = (\det N)\,{}^t N^{-1}$.

On en déduit ${}^t N^{-1} = \dfrac{1}{\det M} M$ puis $\operatorname{Com} N = (\det M)^{n-2} M$.

Si $\operatorname{rg} M < n-1$, on a $N = 0$ donc $\operatorname{Com} N = 0$.

Si $\operatorname{rg} M = n-1$, on a $\operatorname{rg} N = 1 < n-1$ donc $\operatorname{Com} N = 0$.

Ex. 23

En ajoutant les lignes $L_2, L_3, \dots, L_n$ à la ligne L_1 : $L_1 \longleftarrow \sum_{i=1}^{n} L_i$,

puis en factorisant $a + (n-1)b$ dans la ligne L_1, il vient : $\det A = \big(a+(n-1)b\big) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}$

Pour $i = 2, 3, \dots, n$, $L_i \longleftarrow L_i - bL_1$ donne $\det A = \big(a+(n-1)b\big) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix}$

Le déterminant qui reste à calculer étant celui d'une matrice triangulaire, il vient : $\det A = \big(a+(n-1)b\big)(a-b)^{n-1}$

A est donc inversible si et seulement si $a \neq b$ et $a + (n-1)b \neq 0$ (n est supposé $\geqslant 2$).

- Calcul de A^{-1} Considérons le système (S) : $AX = Y$ équivalent à $X = A^{-1}Y$

(S) est équivalent à :

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + \dots + bx_n = y_1 & (E_1) \\ bx_1 + ax_2 + bx_2 + \dots + bx_n = y_2 & (E_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ bx_1 + \dots + bx_{n-1} + ax_n = y_n & (E_n) \\ x_1 + \dots + x_n = \dfrac{1}{a+(n-1)b}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) & (E_{n+1}) \end{cases}$$

l'équation supplémentaire étant la somme des n équations de (S).

On obtient encore un système équivalent en remplaçant chaque équation (E_i) par $(E_i) - b(E_{n+1})$, et il en résulte :

$$\text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n \quad (a-b)x_i = y_i - \frac{b}{a+(n-1)b}(y_1 + \dots + y_n)$$

soit $x_i = \dfrac{1}{(a-b)\big(a+(n-1)b\big)} \left[\big(a+(n-2)b\big) y_i - b \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} y_i \right]$

En conséquence, on a : $A^{-1} = \dfrac{1}{(a-b)\big(a+(n-1)b\big)} \begin{pmatrix} a+(n-2)b & & & \\ & \ddots & & (-b) \\ & (-b) & \ddots & \\ & & & a+(n-2)b \end{pmatrix}$

Copyrighted material

Niveau 3

Ex. 24

Toute permutation est un produit de transpositions : théorème fondamental.

Il suffit donc de montrer que toute transposition peut elle-même se décomposer en produit d'éléments de Σ.

Soit $x \neq y$ dans $[\![2, n]\!]$. Notons que $(1\ y)$ et $(1\ x)$ sont dans Σ.

Tout $u \in [\![1, n]\!] \setminus \{1, x, y\}$ est invariant par $(1\ x) \circ (1\ y) \circ (1\ x)$. Seules les images de 1, x et y méritent attention.

$$\begin{array}{ccccccc} & & (1\ x) & & (1\ y) & & (1\ x) \\ 1 & \longrightarrow & x & \longrightarrow & x & \longrightarrow & 1 \\ x & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & y & \longrightarrow & y \\ y & \longrightarrow & y & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & x \end{array}$$

Ainsi, $(x\ y) = (1\ x) \circ (1\ y) \circ (1\ x)$.

Pour $k \in [\![2, n]\!]$, soit $\Sigma_k = \Sigma \setminus \{(1\ k)\}$. Chacun des $n-2$ éléments de Σ_k laisse k invariant ; il en est donc de même pour les composées de ces $n-2$ transpositions. Σ_k n'est donc pas générateur de $\mathcal{S}_n$. La famille Σ est dite génératrice minimale, dans le sens où toute sous-famille stricte de Σ n'est plus une famille génératrice de $\mathcal{S}_n$.

Ex. 25

1) Tout élément de $\mathcal{A}_n$ peut s'écrire en produit d'éléments de $\Sigma = \{(1\ i),\ i \in [\![2, n]\!]\}$: exercice 19.

Les éléments de $\mathcal{A}_n$ s'écrivent comme produit d'un nombre pair d'éléments de Σ. Il suffit donc de montrer que le produit de deux éléments de Σ peut se décomposer en produit de cycles du type $(1\ 2\ i)$, avec $i \in [\![2, n]\!]$.

2) Pour x, y dans $[\![3, n]\!]$ et $x \neq y$, on a $(1\ 2\ x) \circ (1\ 2\ y) = (1\ x) \circ (2\ y)$.

Or $(2\ y) = (1\ y) \circ (1\ 2) \circ (1\ y)$ d'où $(1\ 2\ x) \circ (1\ 2\ y) = (1\ x) \circ (1\ y) \circ (1\ 2) \circ (1\ y)$.

De $(1\ 2) \circ (1\ y) = (1\ y\ 2) = (1\ 2\ y)^{-1}$ on déduit $(1\ x) \circ (1\ y) = (1\ 2\ x) \circ (1\ 2\ y)^2$.

Il reste à examiner $(1\ 2) \circ (1\ y)$, avec $y \geqslant 3$ et $(1\ x) \circ (1\ 2)$, avec $x \geqslant 3$.

On a $(1\ x) \circ (1\ 2) = (1\ 2\ x)$. Et enfin, $(1\ 2) \circ (1\ y) = (1\ y\ 2) = (1\ 2\ y)^2$.

Ex. 26

La matrice P_σ de la permutation σ est $P_\sigma = \begin{pmatrix} (0) & I_p \\ I_{n-p} & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

D'après l'exemple **17**, nous avons $\varepsilon(\sigma) = \det P_\sigma$.

Posons $D_{n,p} = \begin{vmatrix} (0) & I_p \\ I_{n-p} & (0) \end{vmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Nous avons $D_{n,0} = \det I_n = 1$.

Développons suivant la dernière colonne :

$$D_{n,p} = (-1)^{n+p} \begin{vmatrix} (0) & I_{p-1} \\ I_{n-p} & (0) \end{vmatrix} = (-1)^{n+p} \begin{vmatrix} (0) & I_{p-1} \\ I_{(n-1)-(p-1)} & (0) \end{vmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

d'où $D_{n,p} = (-1)^{n-p} D_{n-1,p-1}$ puis, pour $k \in [\![1, p]\!]$, $D_{n,p} = (-1)^{k(n-p)} D_{n-k,p-k}$

et finalement, $D_{n,p} = (-1)^{p(n-p)}$ ce qui donne $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p(n-p)}$.

Ex. 27

Si $a = 1$, on a évidemment $D_n = 0$. Le lecteur vérifiera que $D_n = 0$ si a est une racine $n^{\text{ième}}$ de 1.

Si $a = 0$, on a $D_n = 1$ (déterminant de la matrice I_n). On suppose maintenant que $a \notin \mathbb{U}_n$ et $a \neq 0$.

Il s'agit d'un déterminant circulant droit. Considérons donc $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a^k X^k = \dfrac{a^n X^n - 1}{aX - 1}$

Pour $\theta \in \mathbb{U}_n$, on a $P(\theta) = \dfrac{a^n - 1}{a\theta - 1}$. Par suite, $D_n = \dfrac{(a^n - 1)^n}{\prod\limits_{\theta \in \mathbb{U}_n} (a\theta - 1)}$

Les $a\theta$ sont les racines de $X^n - a^n$ et les $a\theta - 1$ sont les racines de $(X+1)^n - a^n$.

Le produit des racines de $(X+1)^n - a^n$ est $(-1)^n(1 - a^n)$.

Il vient alors $D_n = \dfrac{(a^n - 1)^n}{(-1)^n(1 - a^n)} = (1 - a^n)^{n-1}$. Notons que les cas particuliers rentrent dans le résultat général.

Copyrighted material

Ex. 28

Soit φ l'application de E^n dans $\mathbb{K}$ définie par $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \neq j} \alpha_{ij}$.

La linéarité de f et de g, ainsi que la n-linéarité de $\det_{\mathcal{B}}$ montrent que φ est n-linéaire.

Supposons par exemple que $x_1 = x_2$.

On a $\alpha_{12} + \alpha_{21} = \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), g(x_1), x_3, \dots, x_n) + \det_{\mathcal{B}}(g(x_1), f(x_1), x_3, \dots, x_n)$

$j \notin \{1, 2\} \Rightarrow \alpha_{1j} + \alpha_{2j} = \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), x_1, x_3, \dots, g(x_j), \dots, x_n) + \det_{\mathcal{B}}(x_1, f(x_1), \dots, g(x_j), \dots, x_n)$

Comme $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée, on a $\alpha_{12} + \alpha_{21} = 0$ et $\alpha_{1j} + \alpha_{2j} = 0$. De même, $\alpha_{j1} + \alpha_{j2} = 0$.

$i \neq j$ et $\{i' j\} \cap \{1, 2\} = \varnothing \Rightarrow \alpha_{ij} = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, f(x_i), x_{i+1}, \dots x_{j-1}, g(x_j), x_{j+1}, \dots, x_n) = 0$

Alors que φ est alternée et il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = k \det_{\mathcal{B}}$. et $k = \varphi(e_1, \dots, e_n)$, avec $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Avec $[a_{ij}] = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f$ et $[b_{ij}] = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} g$, on obtient :

$$k = \sum_{i \neq j} \det_{\mathcal{B}}(\dots, e_{i-1}, \sum_{s=1}^{n} a_{si} e_s, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, \sum_{r=1}^{n} b_{rj} e_j, e_{j+1}, \dots).$$

Les propriétés de $\det_{\mathcal{B}}$ donnent alors $k = \sum_{i \neq j} a_{ii} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{j-1}, \sum_{r} b_{rj} e_r, e_{j+1}, \dots, e_n)$

$$+ \sum_{i \neq j} a_{ji} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, \sum_{r} b_{rj} e_r, e_{j+1}, \dots)$$

d'où $k = \sum_{i \neq j} a_{ii} b_{jj} - \sum_{i \neq j} a_{ji} b_{ij} = \sum_{i,j} a_{ii} b_{jj} - \sum_{i,j} a_{ij} b_{ji}$ c'est-à-dire $k = \mathrm{Tr} f \ \mathrm{Tr} g - \mathrm{Tr}(f \circ g)$.

Ex. 29

En considérant $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & \\ \vdots & & A & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$ on a $\det A = \det B$.

Soit $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$ et $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ la famille des vecteurs-colonnes de B.

On a $\det B = \det_{\mathcal{B}}(c_0, c_1, \dots, c_n) = \det_{\mathcal{B}}(c_0, c_1 - c_0, \dots, c_n - c_0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$

La première ligne étant $2e_0 - \sum_{i=0}^{n} e_i$; on obtient $\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & \\ \dots & & [a_i^j] & \\ 1 & & & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ \dots & & [a_i^j] & \\ 1 & & & \end{vmatrix}$

D'où $\det A = 2a_1 \cdots a_n V_n(a_1, \dots, a_n) - V_{n+1}(1, a_1, \dots, a_n) = \left(2 \prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} (a_k - 1)\right) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$

Ex. 30

On a $\det A = 0$ dès que $\mathrm{Card}\{a, b, c, d\} < 4$. Supposons dans la suite $\mathrm{Card}\{a, b, c, d\} = 4$.

En développant $P(x) = \det B(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$ suivant la première ligne, on voit que $P(x)$ est un polynôme de degré 4 en x : en effet le coefficient de x^4 est le déterminant de Vandermonde $V(a, b, c, d)$

Comme $\det A$ est l'opposé du cofacteur de x^3, c'est l'opposé du coefficient de x^3 dans $P(x)$.

Avec $\det B(x) = V(x, a, b, c, d)$, il vient : $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)V(a, b, c, d)$.

Le coefficient de x^3 étant $-(a + b + c + d)V(a, b, c, d)$, on conclut :

$$\det A = (a + b + c + d)(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$$

Copyrighted material

Ex. 31

1) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculons le déterminant de $\begin{pmatrix} -\lambda & -3 & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda & -1 \\ -5 & -6 & -1 & 6-\lambda \end{pmatrix}$

pour la détermination de λ tel que $f - \lambda\,\mathrm{Id}$ a un noyau non nul.

Avec les opétations $L3 \leftarrow L3 + (3-\lambda) \times L1$ et $L4 \leftarrow L4 - L1$, on obtient :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & 0 & 2 \\ 2-\lambda(3-\lambda) & 2-3(3-\lambda) & 0 & -1+3-\lambda \\ \lambda-5 & -3 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

Il vient alors $P(\lambda) = -\begin{vmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ \lambda^2-3\lambda+2 & 3\lambda-7 & 2-\lambda \\ \lambda-5 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}$ en développant suivant la troisième colonne.

En ajoutant la troisième colonne à la première et développement selon la première :

$$P(\lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 2 \\ \lambda^2-4\lambda+4 & 3\lambda-7 & 2-\lambda \\ 0 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

Finalement, $P(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda^2-5\lambda+6) = (\lambda-2)^3(\lambda-3)$.

2) Étude du cas $\lambda = 3$: $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ est dans $\mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{Id})$: $\begin{cases} -3x-3y-z+t=0 \\ -2x-3y+2t=0 \\ 2x+2y-t=0 \\ -5x-6y-z+3t=0 \end{cases}$. Ce qui équivaut à

$\begin{cases} -x-z-t=0 \\ -2x-3y+2t=0 \\ -y+t=0 \end{cases}$ soit $y=t$, $2x=-t$, $2z=-t$ en effectuant $E1-E2$, $E2$, $E3+E2$, et $E4=E1+E2$.

donc $\mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(a)$, avec $a=(1,-2,1,-2)$.

Étude du cas $\lambda = 2$: $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ est dans $\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id})$: $\begin{cases} -2x-3y-z+t=0 \\ -2x-2y+2t=0 \\ 2x+2y+z-t=0 \\ -5x-6y-z+4t=0 \end{cases}$

qui équivaut à $\begin{cases} 2x+3y+z=t \\ x+y=t \\ z=-t \\ 5x+6y+z=4t \end{cases}$ d'où $\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(b)$ avec $b=(1,0,-1,1)$

3) Soit (e_1,e_2,e_3,e_4) base canonique. Le choix de $a = e_1 - 2e_2 + e_3 - 2e_4$ et $b = e_1 - e_3 + e_4$ donne $e_1 = b + e_3 - e_4$ et $2e_2 = -a + b + 2e_3 - 3e_4$;

la matrice de f dans la base (a,b,e_3,e_4) est $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

en reportant $f(a) = 3a$, $f(b) = 2b$, $f(e_3) = -e_1 + 3e_3 - e_4 = -b + 2e_3$ et

$f(e_4) = e_1 + 2e_2 - e_3 + 6e_4 = -a + 2b + 2e_3 + 2e_4$.

Copyrighted material

Ex. 32

Posons $P = (p_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $Q = (q_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

1) Alors $PE_{kl} = \sum_{(i,j)} p_{ij}E_{ij}E_{kl} = \sum_{i=1}^{n} p_{ik}E_{il}$, en utilisant la propriété $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$,

puis $PE_{kl}P^{-1} = \sum_{i=1}^{n} p_{ik}\sum_{j=1}^{n} q_{lj}E_{ij}$, soit : $\varphi_P(E_{kl}) = \sum_{(i,j)} p_{ik}q_{lj}E_{ij}$ avec $\sum_{r,j} q_{rj}E_{il}E_{rj} = \sum_j q_{lj}E_{ij}$.

La matrice A de φ_P dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est alors donnée par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} q_{11}P & q_{21}P & \cdots & q_{n1}P \\ q_{12}P & q_{22}P & \cdots & q_{n2}P \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{1n}P & q_{2n}P & \cdots & q_{nn}P \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{C}).$$ On en déduit $\operatorname{Tr}\varphi_P = \operatorname{Tr}P \operatorname{Tr}P^{-1}$.

2) On a $A = BC$, avec B et C dans $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{C})$: $B = \begin{pmatrix} q_{11}I_n & q_{21}I_n & \cdots & q_{n1}I_n \\ q_{12}I_n & q_{22}I_n & \cdots & q_{n2}I_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{1n}I_n & q_{2n}I_n & \cdots & q_{nn}I_n \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} P & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & P & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & P \end{pmatrix}$

$\det A = \det B \det C$, et $\det C = (\det P)^n$ puisque C est triangulaire par blocs.

Notons que c'est ${}^tP^{-1}$ qui apparaît dans B. La méthode du pivot de Gauss permet de transformer ${}^tP^{-1}$ en une matrice triangulaire $T = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & d_{nn} \end{pmatrix}$ telle que $\det P^{-1} = \det {}^tP^{-1} = \prod_k d_{kk}$.

En effectuant la même transformation sur les blocs de la matrice B, on obtient $\det B = \begin{vmatrix} d_{11}I_n & \cdots & d_{1n}I_n \\ & \ddots & \vdots \\ & & d_{nn}I_n \end{vmatrix}$.

Il s'ensuit $\det B = \prod_{k=1}^{n} d_{kk}^n = (\det P^{-1})^n$ et en conclusion, il vient $\det A = 1$.

Ex. 33

1) Posons $M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ Le système se lit $\operatorname{Com} M = A$.

On sait que (exemple **22**) :
$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{rg}M = 3 & \iff & \operatorname{rg}(\operatorname{Com}M) = 3 & \iff & \operatorname{rg}A = 3 \\ \operatorname{rg}M = 2 & \iff & \operatorname{rg}(\operatorname{Com}M) = 1 & \iff & \operatorname{rg}A = 1 \\ \operatorname{rg}M \leqslant 1 & \iff & \operatorname{rg}(\operatorname{Com}M) = 0 & \iff & A = 0 \end{array}$$

2) Étude du rang de A. Le déterminant circulant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ est égal à :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$

Notons que $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab = \frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$

d'où $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab \geqslant 0$ et $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab = 0 \iff a = b = c$

Notons P le plan d'équation $X+Y+Z=0$ et D la droite définie par $X = Y = Z$. Il vient alors

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{rg}A = 3 & \iff & (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus (P \cup D) \\ \operatorname{rg}A = 2 & \iff & (a,b,c) \in P \setminus \{(0,0,0)\} \\ \operatorname{rg}A = 1 & \iff & (a,b,c) \in D \setminus \{(0,0,0)\} \end{array}$$

Copyrighted material

3) Résolution de $\operatorname{Com} M = A$.

- Supposons que A est de rang 3. Il en est alors de même pour M.

D'après l'exemple **22**, on a $\operatorname{Com}(\operatorname{Com} M) = (\det M)M$ donc $M = \dfrac{1}{\det M}\operatorname{Com} A$.

Or $\det A = \det(\operatorname{Com} M) = (\det M)^2$.

Il est donc nécessaire que $\det A > 0$, c'est-à-dire $(a, b, c) \notin D$ et $a + b + c > 0$. Dans ce cas :

$\det M = \sqrt{\det A}$ ou $\det M = -\sqrt{\det A}$ et les solutions M sont $\dfrac{1}{\sqrt{\det A}}\operatorname{Com} A$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{\det A}}\operatorname{Com} A$

d'où $x = \lambda(a^2 - bc)$, $y = \lambda(b^2 - ca)$, $z = \lambda(c^2 - ab)$ avec $\lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\det A}}$

- Si le rang de A est 2, il n'y a pas de solution (le rang de $\operatorname{Com} M$ n'est pas égal à 2).
- Si le rang de A est 1, c'est-à-dire $a = b = c \neq 0$, on a $\operatorname{rg} M = 2$, donc $x+y+z = 0$, avec $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

En ajoutant les trois équations du système, il vient $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = 3a$

ou $\dfrac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \dfrac{1}{2}(x + y + z)^2 = 3a$, soit $x^2 + y^2 + z^2 = 2a$ ce qui nécessite $a > 0$.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, les solutions sont les coordonnées des points du cercle intersection du plan $X + Y + Z = 0$ et de la sphère $X^2 + Y^2 + Z^2 = 2a$

Un paramétrage de ce cercle est, pour $\theta \in \mathbb{R}$, en posant $r = \dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right), \quad z = r\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

On vérifie sans peine que ces triplets (x, y, z) conviennent.

- Il reste le cas où $A = 0$, c'est-à-dire $a = b = c = 0$.

Si M est solution, on a nécessairement $\operatorname{rg} M \leqslant 1$, c'est-à-dire $x = y = z$.

Il est immédiat que les triplets (x, x, x) conviennent.

Ex. 34

1) Supposons que la famile $(f_1, \dots, f_n)$ soit liée.

Il existe alors une famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de réels non tous nuls telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$.

On peut par exemple choisir $\lambda_n \neq 0$ et plus précisément $\lambda_n = 1$.

Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, notons $\ell_1, \dots \ell_n$ les lignes de la matrice $A = \left[f_i(x_j)\right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a $\det A = \det_B(\ell_1, \dots, \ell_n) = \det_B\left(\ell_1, \dots, \ell_{n-1}, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i\right)$ où B est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_1), \dots, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_n)\right) = (0, 0, \dots, 0)$, donc $\det A = 0$.

2) Établissons la réciproque par récurrence.

Le cas $n = 1$ est trivial : une famille f à un élément est libre quand $f \neq 0$, c'est-à-dire quand il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$.

Supposons alors le résultat acquis pour $n - 1$, avec $n \geqslant 2$.

Si $(f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre, alors la famille extraite $(f_1, \dots, f_{n-1})$ est libre.

Hypothèse de récurrence : il existe $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $\det A_{n-1} \neq 0$ avec de $A_{n-1} = \left[f_i(x_j)\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n-1}}$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x_n) = \det A_n$, avec $A_n = \left[f_i(x_j)\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

Copyrighted material

En développant ce déterminant suivant sa dernière colonne, on a :

$g(x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_n)$, où les λ_i sont les cofacteurs des termes de la dernière colonne.

En particulier, λ_n est le déterminant de A_{n-1}, donc $\lambda_n \neq 0$.

Avec $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ et $\lambda_n \neq 0$, la fonction g n'est pas la fonction nulle et il existe $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_n) \neq 0$, ce qui équivaut au résultat souhaité.

Ex. 35

1) Avec l'exemple 12, mise en œuvre, il suffit de montrer que toute transposition $(1\ i)$, $2 \leqslant i \leqslant n$, est un produit de transpositions $(k\ k+1)$, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

C'est vrai pour $i = 2$. En outre, on a $(1\ i+1) = (i\ i+1) \circ (1\ i) \circ (i\ i+1)$, ce qui permet de conclure par récurrence.

2) Notons $C = (1\ 2\ \ldots\ n)$ et $\tau = (1\ 2)$. On a $C \circ \tau \circ C^{-1} = (2\ 3)$

Si $C^k \circ \tau \circ C^{-k} = (k+1\ k+2)$, alors $C^{k+1} \circ \tau \circ C^{-k-1} = C \circ (k+1\ k+2) \circ C^{-1} = (k+2\ k+3)$

ce qui permet de conclure par récurrence que toute transposition $(k\ k+1)$ est engendrée par $\{C, \tau\}$.

La première partie permet d'en déduire que toute permutation est engendrée par $\{C, \tau\}$.

Ex. 36

1) Premier cas $M = J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. Alors, avec $A + M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \\ \vdots & (a_{ij}) & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$,

il vient $\det(A+M) = \det A + \alpha_{11}$, où α_{11} est le cofacteur de $a_{1,1}$.

De même, $\det(A-M) = A - \alpha_{11}$ puis $\det\big((A+M)(A-M)\big) = (\det A)^2 - \alpha_{11}^2 \leqslant (\det A)^2$.

2) Deuxième cas : il existe P et Q dans $\mathrm{GL}_n(R)$ telles que $M = PJQ$. En posant $B = P^{-1}AQ^{-1}$, on a

$\det\big((A+M)(A-M)\big) = \det\big(P(B+J)QP(B-J)Q\big) = \det P^2 \det Q^2 \det\big((B+J)(B-J)\big)$.

On a (première question) : $\det\big((B+J)(B-J)\big) \leqslant (\det B)^2$.

Alors $\det\big((A+M)(A-M)\big) \leqslant \det P^2 \det Q^2 (\det B)^2$, soit $\det\big((A+M)(A-M)\big) \leqslant (\det A)^2$.

Ex. 37

1) Première condition : en prenant $M = A$, il vient $\det(2A) = 2\det A$, soit $(2^n - 2)\det A = 0$, donc $\det A = 0$.

On est ramené à $\det(A+M) = \det M$, avec A non inversible (ou de rang strictement inférieur à n).

Première démarche : $(A_1, \ldots, A_n)$ vecteurs colonnes de A. On prend M_i dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est $-A_i$. Alors $A + M_i$ n'est pas inversible et il s'ensuit $\det M_i = 0$.

Si A n'est pas la matrice nulle, on prend $A_i \neq 0$. On choisit des colonnes $U_j, j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$ qui complètent $-A_i$ en une famille de colonnes indépendantes, d'où $\det M_i \neq 0$ pour une contradiction.

Seconde démarche : Soit $r = \mathrm{rg}\, A$ et P, Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PJ_rQ$ avec $J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$.

Pour $M = P(I_n - J_r)Q$, $\det\big(PJ_rQ + P(I_n - J_r)Q\big) = \det\big(P(I_n - J_r)Q\big)$ donne $1 = \det(I_n - J_r)$,

ce qui implique $J_r = 0$, donc $A = 0$.

2) En posant $U = M + B$, $\det(A+M) = \det(B+M)$ se lit $\det(A - B + U) = \det U$.

Comme en première partie, il vient $\det(A-B) = 0$ puis $A - B = 0$.

Copyrighted material

CHAPITRE

4

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

A. Sous-espces stables 150
1. Endomorphisme induit 150
2. Interprétation matricielle 150

B. Polynômes d'un endomorphisme 152
1. Idéaux de l'anneau des polynômes 152
2. Puissances d'un endomorphisme 153
3. Polynômes d'un endomorphisme 154
4. Idéal annulateur 155

C. Éléments propres d'un endomorphisme 155

D. Éléments propres d'une matrice carrée 159
1. Valeurs propres – Vecteurs propres 159
2. Polynôme caractéristique 159

E. Réduction en dimension finie 161
1. Diagonalisation 161
2. Pratique de la diagonalisation 164
3. Trigonalisation 166
4. Le théorème de Hamilton-Cayley 169

F. Applications de la réduction 170
1. Puissance $p^{\text{ème}}$ d'une matrice ou d'un endomorphisme 170
2. Étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 173

Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre 175

Énoncés des exercices 183

Solutions des exercices 186

Copyrighted material

A. Sous-espaces stables

Dans ce chapitre, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Endomorphisme induit

Définition 1

Un sous-espace vectoriel F de E est **stable par** $u \in \mathscr{L}(E)$ si et seulement si $u(F) \subset F$. ✎ (1)

✎ (1) On dit aussi que u stabilise F.

Définition 2

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable pour $u \in \mathscr{L}(E)$, la restriction $u_{|F}$ de u à F induit un endomorphisme de F, noté u_F, défini par :

$$\forall x \in F,\quad u_F(x) = u(x)$$

Remarque

$u_{|F}$ et u_F ne diffèrent que par l'ensemble d'arrivée : $u_{|F} \in \mathscr{L}(F, E)$ et $u_F \in \mathscr{L}(F, F)$

Appelons i l'injection canonique de F dans E : $\forall x \in F,\ i(x) = x$.

On a alors $i \in \mathscr{L}(F, E)$ et $u_{|F} = i \circ u_F$.

Propriété 1

Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, l'image et le noyau de u sont stables par u.

☞ Il est clair que $u(\operatorname{Im} u) \subset u(E)$ et $u(\operatorname{Ker} u) = \{0\} \subset \operatorname{Ker} u$.

Propriété 2

Soit u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$.

Alors, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.

En particulier, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par u.

☞ Pour tout $y = u(x)$ de $\operatorname{Im} u$, on a $v(y) = u\big(v(x)\big)$ donc $v(y) \in \operatorname{Im} u$.

Pour tout x de $\operatorname{Ker} u$, on a $u\big(v(x)\big) = v\big(u(x)\big) = 0$ donc $v(x) \in \operatorname{Ker} u$.

Corollaire

Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$ et tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$,

les sous-espaces $\operatorname{Im} P(u)$ et $\operatorname{Ker} P(u)$ sont stables par u. ✎ (2)

✎ (2) u et $P(u)$ sont permutables.

2. Interprétation matricielle

E est maintenant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

2.1 – Caractérisation matricielle d'un sous-espace stable

Théorème 1

Étant donné un sous-espace vectoriel F de E, $F \neq \{0\}$, et $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E obtenue en complétant une base $\mathscr{B}_F = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de F.

F est stable par $u \in \mathscr{L}(E)$ si et seulement si $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} u$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

☞ En posant $M = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}} u$, on a $M = [m_{ij}]$ avec $m_{ij} = e_i^*\big(u(e_j)\big)$ où $(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est la base duale de $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (m_{ij} est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $u(e_j)$) sur la base $\mathscr{B}$.

F est stable par u si et seulement si $\forall j \in [\![1, p]\!],\ u(e_j) \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$

c'est-à-dire $\forall j \in [\![1, p]\!], \forall i \in [\![p+1, n]\!],\ e_i^*\big(u(e_j)\big) = 0$

ou encore $\forall j \in [\![1, p]\!], \forall i \in [\![p+1, n]\!],\ m_{ij} = 0$.

Copyrighted material

Remarques

1) Soit $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ et p la projection sur G parallèlement à F. On a $E = F \oplus G$. $p \circ u_{|G}$ stabilise G, donc induit un endomorphisme de G que l'on note encore $p \circ u_{|G}$ et on a $C = \text{mat}_{\mathfrak{B}_G}\left(p \circ u_{|G}\right)$ en posant $\mathfrak{B}_G = (e_i)_{p+1 \leqslant i \leqslant n}$.

2) Dans les conditions du théorème **1**, il existe une base $\mathfrak{B}$ de E sur laquelle la matrice de u : $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est **triangulaire par blocs**.

On a alors : $\det u = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \times \det C$.

Exemple 1 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice de la forme $N = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\dim E = 4$, rapporté à une base $\mathfrak{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $M = \text{mat}_{\mathfrak{B}}\, u$.

Par lecture de la matrice, on a $u(e_2) = e_2 + e_4$ et $u(e_4) = -e_2 + e_4$. Donc $F = \text{Vect}(e_2, e_4)$ est stable par u, et d'après le théorème **1**, sur la base $\mathfrak{B}' = (e_2, e_4, e_1, e_3)$, la matrice de u a la forme souhaitée.

En effet, $u(e_2) = e_2 + e_4$, $u(e_4) = -e_2 + e_4$

$u(e_1) = 2e_2 + e_4 + e_1 - e_3$, $u(e_3) = e_4 + 2e_1 + e_3$

donne $\text{mat}_{\mathfrak{B}'}\, u = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = N$.

La matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est la matrice de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ donc telle que $P^{-1} = {}^tP$.

Ainsi $N = P^{-1}MP = {}^tPMP$ et N se déduit de M en effectuant la permutation σ sur les lignes puis sur les colonnes (ou inversement).

2.2 – Somme directe de sous-espaces stables

Théorème 2

Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires tels que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \dim F_i = n_i \geqslant 1$$

et $\mathfrak{B}$ une base de E adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Alors chaque F_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si $\text{mat}_{\mathfrak{B}}\, u$ est de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & A_p \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![1, p]\!], A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$. ✎ (3)

✎ (3) Justification analogue à celle du théorème 1.

Remarque

Dans les conditions de ce théorème, la matrice de u dans la base $\mathfrak{B}$ est **diagonale par blocs**.

On a alors : $\det u = \det \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & A_p \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{p} \det A_i$.

Copyrighted material

B. Polynômes d'un endomorphisme

1. Idéaux de l'anneau des polynômes

Définition 3

Un **idéal** de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est une partie I de $\mathbb{K}[X]$ non vide et vérifiant les propriétés :

(1) I est stable par l'addition : $\forall (P, Q) \in I^2,\ P + Q \in I$.

(2) $\forall P \in I,\ \forall U \in \mathbb{K}[X],\ PU \in I$. ✎ (4)

✎ (4) Un idéal est stable pour le produit par tout élément de l'anneau.

Définition 4

Le sous-ensemble réduit au polynôme nul et $\mathbb{K}[X]$ lui-même sont des idéaux de $\mathbb{K}[X]$: ce sont les **idéaux triviaux** de l'anneau.

Tout autre idéal de $\mathbb{K}[X]$ est dit **idéal propre** de l'anneau.

Propriété 3

Étant donné deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble :

$$I(A, B) = \{AU + BV \,/\, (U, V) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]\} \quad \text{est un idéal}$$

Propriété 4

Tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$. ✎ (5)

Si un idéal I de $\mathbb{K}[X]$ contient le polynôme 1, alors $I = \mathbb{K}[X]$.

✎ (5) En particulier, il contient le polynôme nul.

☞
- I est non vide et stable pour l'addition. ✎ (6)

  Étant donné $P \in I$, on a $(-1) \times P \in I$, ✎ (7) c'est-à-dire $-P \in I$.
- De même, si $1 \in I$, pour tout U de $\mathbb{K}[X]$ on a $1 \times U \in I$, c'est-à-dire $U \in I$.

✎ (6) Il suffit de montrer qu'il est stable pour le passage à l'opposé.

✎ (7) Propriété (2) de la définition.

Propriété 5

L'intersection d'une famille $(I_j)_{j \in J}$ d'idéaux de $\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

☞ Chaque idéal contient 0 donc $I = \bigcap_{j \in J} I_j \neq \varnothing$ et on vérifie **(1)** et **(2)** très facilement.

Définition 5

Étant donné une partie E de $\mathbb{K}[X]$, l'idéal **engendré** par E est l'intersection de la famille de tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ qui contiennent E. C'est ✎ (8) le plus petit élément de cette famille.

✎ (8) Au sens de la relation d'ordre définie par l'inclusion.

Définition 6

Un idéal est dit **principal** lorsqu'il est engendré par une famille réduite à un élément A.

Propriété 6

L'idéal principal engendré par $A \in \mathbb{K}[X]$ est l'ensemble (A) des multiples de A :

$$(A) = \{AU \,/\, U \in \mathbb{K}[X]\}$$ ✎ (9)

On note aussi $(A) = A\,\mathbb{K}[X]$.

✎ (9) $A=0 \Rightarrow (A)=\{0\}$.

☞ (A) est un idéal contenant A.

Tout idéal contenant A contient aussi tout polynôme AU, $U \in \mathbb{K}[X]$, donc contient (A).

Ainsi (A) est le plus petit élément de la famille des idéaux contenant A.

Copyrighted material

Propriété 7

L'idéal engendré par la famille $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble :

$$I(A_1,\ldots,A_n)=\{A_1U_1+A_2U_2+\cdots+A_nU_n\ /\ \forall\, i\in[\![1,n]\!],\ U_i\in\mathbb{K}[X]\}.$$

$I(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ est appelé la **somme des idéaux** $(A_1),(A_2),\ldots,(A_n)$ et on le note $(A_1)+(A_2)+\cdots+(A_n)$.

Comme précédemment on vérifie :

a) que $I(A_1,\ldots,A_n)$ est un idéal contenant $A_1,A_2,\ldots,A_n$,

b) que tout idéal contenant $A_1,A_2,\ldots,A_n$ contient aussi $I(A_1,\ldots,A_n)$.

Remarque

$$(A_1)+(A_2)+\cdots+(A_n)=(0)\iff A_1=A_2=\cdots=A_n=0$$

Théorème 3

Tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est principal. On dit que $\mathbb{K}[X]$ est un **anneau principal**.

☞ Soit I un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Si $I=\{0\}$ alors $I=0\ \mathbb{K}[X]$: il est engendré par 0.

Si $I\neq\{0\}$, l'ensemble $D=\{\deg(P)\ /\ P\in I\setminus\{0\}\}$ est non vide, inclus dans $\mathbb{N}$.✎ (10)

En notant n_0 son plus petit élément, il existe $A\in I\setminus\{0\}$ tel que $n_0=\deg(A)$.

Pour tout $P\in I\setminus\{0\}$, on a $\deg(P)\geqslant n_0$, et ✎ (11) il existe $(Q,R)\in\mathbb{K}[X]^2$ unique tel que $P=AQ+R$ avec $R=0$ ou $R\neq 0$ et $\deg(R)<\deg(A)$. ✎ (12)

De la relation $R=P-AQ$ on déduit que $R\in I$.

$\deg(R)<n_0$, montre que R n'appartient pas à $I\setminus\{0\}$, donc $R=0$ puis $P=AQ$.

On a ainsi montré $I\subset(A)$ et comme il est immédiat que $(A)\subset I$, on a finalement $I=(A)$.

✎ (10) Il admet donc un plus petit élément.

✎ (11) Division euclidienne de P par A.

✎ (12) Avec $\deg(0)=-\infty$, on résume en $\deg(R)<\deg(A)$.

Remarques

- Si A est un générateur d'un idéal I non réduit à $\{0\}$, l'ensemble des générateurs de I est $\{\lambda A\ /\ \lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}\}$.

En effet, si B est un générateur de I, B divise A (car $A\in(B)$) et A divise B (car $B\in(A)$) donc il existe $\lambda\neq 0$ tel que $B=\lambda A$.

D'autre part, pour tout $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$, il est clair que $(A)=(\lambda A)$.

- Un idéal I non réduit à $\{0\}$ admet un générateur unitaire ✎ (13) et un seul.

En effet, si A est un générateur de I, il existe $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$, unique, tel que λA ait 1 pour coefficient dominant.

✎ (13) C'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1.

2. Puissances d'un endomorphisme

Définition 7

Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. On définit les puissances u^n de u, où $n\in\mathbb{N}$, par récurrence en posant :

$$u^0=\mathrm{Id}_E\quad\text{et}\quad\forall n\in\mathbb{N},\ u^{n+1}=u\circ u^n$$

Propriété 8

$$\forall u\in\mathscr{L}(E),\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2,\quad u^p\circ u^q=u^q\circ u^p=u^{p+q}.$$

Copyrighted material

Propriété 9

Noyaux itérés d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) La suite $\left(\operatorname{Ker} u^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante : $\operatorname{Ker} u^p \subset \operatorname{Ker} u^{p+1}$.

b) Si $\{p \in \mathbb{N} / \operatorname{Ker} u^p = \operatorname{Ker} u^{p+1}\}$ n'est pas vide, il admet un plus petit élément n, qui est appelé l'**indice de** u. Et alors :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \operatorname{Ker} u^{n+q} = \operatorname{Ker} u^n \ , \ \forall q \in [\![0, n-1]\!], \operatorname{Ker} u^{q+1} \neq \operatorname{Ker} u^q$$

c) Si E est de dimension finie, l'existence de n, indice de u, est assurée et $n \leqslant \dim E$.

☞ a) Résulte de l'implication : $u^p(x) = 0 \ \Rightarrow \ u^{p+1}(x) = u\left[u^p(x)\right] = 0$

b) Par définition de n, on a : $\operatorname{Ker} u^{n+1} = \operatorname{Ker} u^n$, d'où pour $q \in \mathbb{N}$:

$x \in \operatorname{Ker} u^{n+q+1} \ \Rightarrow \ u^q(x) \in \operatorname{Ker} u^{n+1} \ \Rightarrow \ u^q(x) \in \operatorname{Ker} u^n \ \Rightarrow \ x \in \operatorname{Ker} u^{n+q}$

Il en résulte $\operatorname{Ker} u^{n+q+1} \subset \operatorname{Ker} u^{n+q}$ donc d'après a) : $\operatorname{Ker} u^{n+q+1} = \operatorname{Ker} u^{n+q}$, puis par récurrence : $\forall q \in \mathbb{N}, \ \operatorname{Ker} u^{n+q} = \operatorname{Ker} u^n$

c) S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Ker} u^{p+1} \neq \operatorname{Ker} u^p$, alors, pour tout $q \leqslant p$:

$$\operatorname{Ker} u^{q+1} \neq \operatorname{Ker} u^q \ \text{ d'où } \ \dim \operatorname{Ker} u^{q+1} \geqslant 1 + \dim \operatorname{Ker} u^q$$

De $u^0 = \mathrm{Id}_E$, on déduit $\dim \operatorname{Ker} u^0 = 0$ et, par récurrence $p \leqslant \dim \operatorname{Ker} u^p \leqslant \dim E$

L'ensemble $\{p \in \mathbb{N} / \operatorname{Ker} u^{p+1} \neq \operatorname{Ker} u^p\}$ est fini, son nombre d'éléments est, par définition, l'indice n de u, il est majoré par la dimension de E.

Remarques

1) Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, l'indice n de u existe, c'est le plus petit entier p tel que $\operatorname{Ker} u^p = E$.

2) Pour $E = \mathbb{R}[X]$ et u l'endomorphisme de E défini par $u(P) = P'$ (polynôme dérivé de P), on a : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \operatorname{Ker} u^p = \mathbb{R}_{p-1}[X]$. L'endomorphisme u n'a pas d'indice.

3. Polynômes d'un endomorphisme

Définition 8

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ $\left(P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)$, on pose $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$

et on dit que $P(u)$ est un **polynôme de l'endomorphisme** u

Notation 1

Étant donné $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $\mathbb{K}[u]$ l'ensemble des polynômes de l'endomorphisme u.

Propriété 10

Étant donné $u \in \mathcal{L}(E)$, l'ensemble $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

☞ On a $\mathbb{K}[u] = \operatorname{Im} \varphi_u$ avec $\varphi_u : P \mapsto P(u)$.

On vérifie facilement que φ_u est un morphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}[X]$ dans la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{L}(E)$: pour tous P, Q dans $\mathbb{K}[X]$ et tous λ, μ dans $\mathbb{K}$:

$\varphi_u(\lambda P + \mu Q) = \lambda \varphi_u(P) + \mu \varphi_u(Q)$, $\varphi_u(PQ) = \varphi_u(P) \circ \varphi_u(Q)$, $\varphi_u(1) = \mathrm{Id}_E$.

La commutativité de $\mathbb{K}[u]$ est conséquence immédiate de celle de $\mathbb{K}[X]$.

Copyrighted material

Définition 9

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ $\left(P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)$, on pose $P(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k$

et on dit que $P(M)$ est un **polynôme de la matrice** M.

On note $\mathbb{K}[M]$ l'ensemble des polynômes de la matrice M.

4. Idéal annulateur

Propriété 11

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'anneaux.

Le noyau $\mathcal{I}(u)$ de Φ_u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. (14)

(14) C'est l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u)=0$.

☞ a) L'examen de φ_u a été vu en propriété 10.

b) ▪ $(\mathcal{I}(u), +)$ est un sous-groupe, comme noyau d'un morphisme de groupes.

▪ $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u)$ donc si $P \in \mathcal{I}(u)$, on obtient $PQ \in \mathcal{I}(u)$ pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$.

Définition 10

$u \in \mathcal{L}(E)$ étant fixé, l'idéal $\mathcal{I}(u)$ est appelé **l'idéal annulateur** de u.

Exemple 2

a) Lorsque $\mathcal{I}(u) \neq \{0\}$, il existe un polynôme unitaire M_u unique tel que :
$\mathcal{I}(u) = M_u \mathbb{K}[X] = \{M_u P | P \in \mathbb{K}[X]\}$. On dit que M_u est le **polynôme minimal de** u.

b) Si E est de dimension finie, tout endomorphisme u de E admet un polynôme minimal.

a) Cela tient au fait que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.

b) Si $\dim E = n$, on a $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$. La famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant n^2}$ est donc liée et il existe $n^2 + 1$ scalaires α_k, $0 \leqslant k \leqslant n^2$, non tous nuls, tels que $\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k u^k = 0$.

En conséquence, en posant $P = \sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k X^k$, on a $P \neq 0$ et $P \in \mathcal{I}(u)$ donc $\mathcal{I}(u) \neq 0$.

C. Éléments propres d'un endomorphisme

Définition 11

Valeurs propres, spectre

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est non injectif, (15)

Le spectre de $u \in \mathcal{L}(E)$, noté $\mathrm{Sp}(u)$, est l'ensemble des valeurs propres de u.

(15) C'est-à-dire s'il existe $x \in E$, $x \neq 0$, $u(x) = \lambda x$.

Définition 12

Vecteurs propres, sous-espace propre

$x \in E$ est vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ si $x \neq 0_E$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que $u(x) = \lambda x$. (16)

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ est le sous-espace $E_u(\lambda) = \mathrm{Ker}(u - \lambda e)$.

(16) Alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

Remarque

Si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$, on a $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = \{0\}$ que l'on note encore $E_u(\lambda)$.

Copyrighted material

Propriété 12

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, $x \neq 0$.
La droite $D = \text{Vect}(x)$ est stable par u si et seulement si x est vecteur propre de u.

Propriété 13

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de valeurs propres de u deux à deux distinctes.
Alors, la somme des sous-espaces propres associés $E_u(\lambda_i) = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E)$ est directe.

☞ Démonstration par récurrence sur n.

- La propriété est vraie pour $n = 2$.

En effet, si $x \in E_u(\lambda_1) \cap E_u(\lambda_1)$, on a $u(x) = \lambda_1 x = \lambda_2 x$, donc :

$$(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0 \text{ et } x = 0 \quad \text{car } \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0.$$

Ainsi $E_u(\lambda_1) \cap E_u(\lambda_2) = \{0\}$ et $E_u(\lambda_1) + E_u(\lambda_2) = E_u(\lambda_1) \oplus E_u(\lambda_2)$.

- Supposons la propriété vraie pour $n \geqslant 2$.

Soit $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ une famille de $n + 1$ valeurs propres deux à deux distinctes.

Si $x \in E_u(\lambda_{n+1}) \cap \sum_{i=1}^{n} E_u(\lambda_i)$, on a $u(x) = \lambda_{n+1} x$, et il existe :

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_u(\lambda_i) \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{donc} \quad u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

On en déduit $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_{n+1}) x_i = 0$ et la somme $\sum_{i=1}^{n} E_u(\lambda_i)$ étant directe d'après l'hypothèse de récurrence, il en résulte :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], (\lambda_i - \lambda_{n+1}) x_i = 0 \text{ donc } \forall i \in [\![1, n]\!], x_i = 0$$

(car $\lambda_i - \lambda_{n+1} \neq 0$). Finalement $x = 0$.

En posant $F = \bigoplus_{i=1}^{n} E_u(\lambda_i)$, on a ainsi $F + E_u(\lambda_{n+1}) = F \oplus E_u(\lambda_{n+1})$, d'où enfin :

$$\sum_{i=1}^{n+1} E_u(\lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{n+1} E_u(\lambda_i).$$

Corollaire 1

Pour λ et μ dans $\text{Sp}(u)$, $\lambda \neq \mu \Rightarrow E_u(\lambda) \cap E_u(\mu) = \{0\}$. ✎ (17)

✎ (17) Un vecteur propre est associé à une seule valeur propre.

Corollaire 2

Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes de u, cette famille est libre.

Propriété 14

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $v \circ u = u \circ v$.
Alors, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

☞ C'est une conséquence de $v \circ (u - \lambda \text{Id}_E) = (u - \lambda \text{Id}_E) \circ v$ et de la propriété 1.

Propriété 15

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \text{Sp}(u)$. Alors :

a) $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\lambda) \in \text{Sp}\big(P(u)\big)$

b) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lambda^k \in \text{Sp}(u^k)$

c) Si $v = u - \alpha \text{Id}_E$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :

$$\lambda \in \text{Sp}(u) \iff \lambda - \alpha \in \text{Sp}(v) \quad \text{et} \quad E_u(\lambda) = E_v(\lambda - \alpha)$$

Copyrighted material

☞ a) $P(X) - P(\lambda)$ est divisible par $X - \lambda$: $P(X) - P(\lambda) = (X - \lambda)Q(X)$, $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$, donc :
$P(u) - P(\lambda)\,\mathrm{Id}_E = Q(u) \circ (u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}\big(P(u) - P(\lambda)\,\mathrm{Id}_E\big)$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \neq \{0\} \Rightarrow \mathrm{Ker}\big(P(u) - P(\lambda)\,\mathrm{Id}_E\big) \neq \{0\}$.

b) On applique a) avec $P(X) = X^k$.

c) Il suffit de remarquer que $u - \lambda\,\mathrm{Id}_E = v - (\lambda - \alpha)\,\mathrm{Id}_E$.

Propriété 16

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$.
Alors, $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{K},\ P(\lambda) = 0\}$.

☞ Le spectre de l'endomorphisme nul est réduit à $\{0\}$ et $P(u) = 0$, donc :
$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Rightarrow P(\lambda) \in \{0\}$. ✎ (18)

✎ (18) C'est un corollaire de la propriété 15.

Corollaire

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent, alors $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.

Propriété 17

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

a) On a $E_u(0) = \mathrm{Ker}\,u$. ✎ (19)

b) Si x est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle, alors $x \in \mathrm{Im}\,u$. ✎ (20)

✎ (19) Définition de $E_u(0)$.

✎ (20) $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \neq 0$ donne $x = \frac{1}{\lambda}u(x)$.

Propriété 18

Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$. Alors 0 n'est pas valeur propre et $\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\right\}$. ✎ (21)

☞ On a $\mathrm{Ker}\,u = \{0\}$ donc $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$. Alors :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u^{-1}) \iff \exists x \in E \setminus \{0\},\ u^{-1}(x) = \lambda x$$
$$\iff \exists x \in E \setminus \{0\},\ \frac{1}{\lambda}x = u(x)$$

✎ (21) Si E est de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ est inversible si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$.

Propriété 19

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $F \neq \{0_E\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par u et $v = u_F$ l'endomorphisme de F induit par u.
On a alors $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathrm{Sp}(u)$ avec pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(v)$:
$$\mathrm{Ker}\,(v - \lambda\,\mathrm{Id}_F) = F \cap \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$$

☞ Pour tout $\lambda \in K$, on a :

$$\mathrm{Ker}\,(v - \lambda\,\mathrm{Id}_F) = \{x \in F \,/\, v(x) = \lambda x\}$$
$$= \{x \in F \,/\, u(x) = \lambda x\}$$
$$= F \cap \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$$

Donc $\mathrm{Ker}\,(v - \lambda\,\mathrm{Id}_F) \neq \{0\} \Rightarrow \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$ ce qui prouve que :
$\mathrm{Sp}(v) \subset \mathrm{Sp}(u)$.

Propriété 20

Étant donné $a \in \mathrm{GL}(E)$, l'application $I_a : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E),\ u \mapsto a \circ u \circ a^{-1}$ est un automorphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathscr{L}(E)$ dit **automorphisme intérieur** associé à a.

☞ On vérifie successivement :

- I_a est une bijection car : $\forall v \in \mathscr{L}(E),\ I_a(u) = v \iff u = a^{-1} \circ v \circ a$.
- I_a est linéaire : $I_a(\lambda u + \mu v) = \lambda I_a(u) + \mu I_a(v)$.
- I_a est un morphisme d'anneaux : $I_a(u \circ v) = I_a(u) \circ I_a(v)$.

Copyrighted material

Propriété 21

Soit $a \in \mathrm{GL}(E)$, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $v = a \circ u \circ a^{-1}$ l'image de u par l'automorphisme intérieur I_a.
On a alors $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(v)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$: $E_v(\lambda) = a\big(E_u(\lambda)\big)$.

☞ Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} x \in E_v(\lambda) &\iff a \circ u \circ a^{-1}(x) = \lambda x \\ &\iff u \circ a^{-1}(x) = \lambda a^{-1}(x) \\ &\iff a^{-1}(x) \in E_u(\lambda) \\ &\iff x \in a\big(E_u(\lambda)\big) \end{aligned}$$

Donc $E_v(\lambda) = a\big(E_u(\lambda)\big)$ et puisque a est un automorphisme de E, $E_v(\lambda)$ est non réduit à $\{0\}$ si et seulement si $E_u(\lambda)$ est non réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire que $\lambda \in \mathrm{Sp}(v)$ équivaut à $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

Exemple 3 Éléments propres de $u \in \mathscr{L}(E)$: les cas usuels.

1) u est une homothétie : $u = \lambda \mathrm{Id}_E$, $\lambda \in \mathbb{K}$,
$\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = E$ et $E \neq \{0\}$, donc λ est valeur propre de u.
$P = X - \lambda$ étant annulateur de u, d'après la propriété **16**, la seule valeur propre possible de u est λ et finalement $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$.

2) u est un projecteur avec $u \neq 0$ et $u \neq \mathrm{Id}_E$.
On a ici $u^2 - u = 0$ donc $X^2 - X$ est annulateur de u. D'après la propriété **16**, $\mathrm{Sp}\, u \subset \{0, 1\}$.
Puisque u est un projecteur, on a $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\, u$.
Donc $u \neq \mathrm{Id}_E$ donne $\mathrm{Ker}\, u \neq \{0_E\}$ et $0 \in \mathrm{Sp}\, u$
puis $u \neq 0$ donne $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$ et $1 \in \mathrm{Sp}\, u$.
Finalement, $\mathrm{Sp}\, u = \{0, 1\}$ et, comme on sait que pour un projecteur $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u$, on a ici $E = E_u(0) \oplus E_u(1)$.

3) u est une symétrie avec $u \neq \mathrm{Id}_E$ et $u \neq -\mathrm{Id}_E$.
On a $u^2 = \mathrm{Id}_E$ donc $X^2 - 1$ est annulateur de u. Avec la propriété **16**, il vient :

$$\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$$

Soit v le projecteur associé à la symétrie u c'est-à-dire $v = \dfrac{u + \mathrm{Id}_E}{2}$ donc :

$$u = P(v) \text{ avec } P = 2X - 1.$$

Les conditions $u \neq \mathrm{Id}_E$ et $u \neq -\mathrm{Id}_E$ donnent $v \neq \mathrm{Id}_E$ et $v \neq 0$.
Donc, d'après 2), on a $\mathrm{Sp}(v) = \{0, 1\}$ et en utilisant la propriété **15** on obtient :

$$P(0) \in \mathrm{Sp}(u) \quad \text{et} \quad P(1) \in \mathrm{Sp}(u)$$

c'est-à-dire $\{-1, 1\} \subset \mathrm{Sp}(u)$. Finalement :

$$\mathrm{Sp}(u) = \{-1, 1\}$$

$$E_u(1) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(v - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\, v$$

$$E_u(-1) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(v)$$

4) u est une affinité différente d'une homothétie.
Dans ce cas, il existe un projecteur v tel que $u = \lambda \mathrm{Id}_E + (1 - \lambda)v$ donc :

$$u = P(v) \quad \text{avec} \quad P = (1 - \lambda)X + \lambda.$$

Puisque u n'est pas une homothétie, on a $v \neq 0$, $v \neq \mathrm{Id}_E$ et $\lambda \neq 1$ donc $\mathrm{Sp}(v) = \{0, 1\}$ et la propriété **15** donne :

$$P(0) \in \mathrm{Sp}(u) \text{ et } P(1) \in \mathrm{Sp}(u) \text{ c'est-à-dire } \{\lambda, 1\} \subset \mathrm{Sp}(u)$$

Avec $\lambda \neq 1$ et $u - \lambda \mathrm{Id}_E = (1 - \lambda)v$ on obtient $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\, v$,
de même $u - \mathrm{Id}_E = (1 - \lambda)(v - \mathrm{Id}_E)$ donne $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(v - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\, v$,
d'où finalement $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda, 1\}$, $E_u(\lambda) = \mathrm{Ker}\, v$, $E_u(1) = \mathrm{Im}\, v$.

Copyrighted material

Exemple 4 Éléments propres d'un endomorphisme de rang 1.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est de rang 1, il existe $a \in E \setminus \{0\}$ et une forme linéaire φ non nulle tels que $\forall x \in E,\ u(x) = \varphi(x)a$. Alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(a)$.

Le seul sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle est donc $\operatorname{Vect} a$ (associé à la valeur propre $\varphi(a)$).

Conséquence

Si $\dim E = 1$. $\operatorname{Sp} u = \{\varphi(a)\}$. $E_u\big(\varphi(a)\big) = E$.

Si $\dim E > 1$. $\operatorname{Sp} u = \{0, \varphi(a)\}$. $E_u(0) = \operatorname{Ker}\varphi$. $E_u\big(\varphi(a)\big) = \operatorname{Vect} a$.

Exemple 5 E étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, étude de $\operatorname{Sp}(u)$ où $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\operatorname{Id}_E$.

Remarquons qu'il existe de tels endomorphismes, par exemple dans $\mathbb{R}^2$, u défini par :

$$(x, y) \mapsto (y, -x) \qquad \text{donc } u^2 = -\operatorname{Id}_E.$$

On a ici $X^2 + 1 \in \mathcal{R}(u)$, donc, par application de la propriété **16**, $\operatorname{Sp}(u) = \varnothing$ car $X^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

Exemple 6 Avec $E = \mathbb{K}[X]$, éléments propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(P) = XP' - P$.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u, il existe $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $(a_n \neq 0)$, tel que $XP' = (\lambda + 1)P$.

On en déduit $na_n = (\lambda + 1)a_n$ d'où $\lambda = n - 1$ (car $a_n \neq 0$) : $\lambda \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$,

puis $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ ka_k = na_k$ d'où $a_k = 0$ et ainsi $P = a_n X^n$.

Réciproquement, il est immédiat que $\forall \lambda \in \mathbb{N} \cup \{-1\},\ P_\lambda = X^{\lambda+1}$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. Ainsi $\operatorname{Sp} u = \mathbb{N} \cup \{-1\}$ et $\forall \lambda \in \operatorname{Sp} u,\ E_u(\lambda) = \operatorname{Vect}(X^{\lambda+1})$.

D. Éléments propres d'une matrice carrée

1. Valeurs propres – Vecteurs propres

Définition 13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; les éléments propres de A (valeurs propres, vecteurs propres) sont les éléments propres de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associés à A.

Conséquences

- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \in \operatorname{Sp}(A) \iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \neq 0,\ AX = \lambda X$.
- Identifions $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$. ✎ (22) $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est vecteur propre de A équivaut à
$$X \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K},\ AX = \lambda X.$$
- Étant donné $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ et $B = PAP^{-1}$, on a $\operatorname{Sp}(A) = \operatorname{Sp}(B)$.

✎ (22) Isomorphisme défini au moyen de leurs bases canoniques

2. Polynôme caractéristique

Théorème 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\det(A - XI_n)$ est un polynôme de degré n.

Copyrighted material

✎ (23) Corps des fractions à coefficients dans $\mathbb{K}$.

☞ $A - XI_n$ est une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}(X)$. ✎ (23)

Posons $A = [a_{ij}]$. $A - XI_n = [p_{ij}(X)]$: $p_{ij}(X) = a_{ij}$ si $i \neq j$, $p_{ii}(X) = a_{ii} - X$.

Alors $\det(A - XI_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma p_{1\sigma(1)} p_{2\sigma(2)} \cdots p_{n\sigma(n)}$.

Si $\sigma \neq \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$. $\prod_{i=1}^{n} p_{i\sigma(i)}(X)$ est un polynôme de degré $\leqslant n-1$.

Pour $\sigma = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$. $\prod_{i=1}^{n} p_{i\sigma(i)}(X) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - X)$ est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

$\det(A - XI)$ est donc un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

Propriété 22

Si A et B sont semblables, on a $\det(A - XI_n) = \det(B - XI_n)$.

☞ Si A et B sont semblables, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $B = P^{-1}AP$, alors :

$\det(B - XI_n) = \det\left(P^{-1}(A - XI_n)P\right) = \det P^{-1} \det(A - XI_n) \det P = \det(A - XI_n)$.

Définition 14

Le **polynôme caractéristique** de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Définition 15

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} u$, le polynôme $\chi_u(X) = \det(A - XI_n)$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ choisie. ✎ (24) C'est le **polynôme caractéristique** de u.

✎ (24) Il ne dépend que de u.

Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E et $A' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} u$, A et A' sont semblables, donc, d'après la propriété **22**, $\det(A - XI_n) = \det(A' - XI_n)$.

Théorème 5

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est valeur propre de u (resp. de A) si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}\, u \iff \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\} \iff \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0.$$

Propriété 23

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

$\chi_u(X)$ (resp. $\chi_A(X)$) est un polynôme de degré n.

- Le coefficient dominant est $(-1)^n$.
- Le coefficient de X^{n-1} est $(-1)^{n-1} \mathrm{Tr}\, u$ (resp. $(-1)^{n-1} \mathrm{Tr}\, A$).
- Le terme constant est $\det u$ (resp. $\det A$).

$$\chi_u(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \mathrm{Tr}\, u \cdot X^{n-1} + \ldots + \det u$$

Propriété 24

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, Alors A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique.

☞ $\chi_{{}^tA}(X) = \det({}^tA - XI_n) = \det {}^t(A - XI_n) = \det(A - XI_n) = \chi_A(X)$.

Copyrighted material

Propriété 25

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace de E stable par u, et $v \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u : $v = u_F$. Alors χ_v divise χ_u.

☞ Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E obtenue en complétant une base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de F ; $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de G supplémentaire de F.

Alors $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $A = \mathrm{mat}_{(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}} v \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, donc :

$$\chi_u(X) = \det \begin{pmatrix} A - XI_p & B \\ 0 & C - XI_{n-p} \end{pmatrix} = \det(A - XI_p) \cdot \det(C - XI_{n-p})$$

soit $\chi_u(X) = \chi_v(X) \cdot \det(C - XI_{n-p})$

Propriété 26

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre de u (resp. de A) d'ordre m**, ✎ (25) alors $1 \leqslant \dim E_u(\lambda) \leqslant m$.

✎ (25) λ est racine d'ordre de multiplicité m de χ_u (resp. de χ_A).

☞
- λ, valeur propre de u, donne $E_u(\lambda) \neq \{0\}$ et donc $\dim E_u(\lambda) \geqslant 1$.
- La restriction v de u à $E_u(\lambda)$ est l'application $x \mapsto \lambda x$ de matrice λI_p (avec $p = \dim E_u(\lambda)$) dans toute base de $E_u(\lambda)$, donc $\chi_v = (\lambda - X)^p$. $E_u(\lambda)$ étant stable par u, on déduit de la propriété **25** que $(\lambda - X)^p$ divise χ_u et donc que $m \geqslant p$.

Remarque importante

Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, son polynôme caractéristique a au moins une racine.

Conséquence : le spectre de u est non vide et u admet au moins un vecteur propre.

E. Réduction en dimension finie

1. Diagonalisation

Définition 16

$u \in \mathcal{L}(E)$ est **diagonalisable** si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale, c'est-à-dire si et seulement si il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E formée de vecteurs propres de u. ✎ (26)

✎ (26) On alors $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} u = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, λ_i est la valeur propre associée au vecteur propre e_i.

Théorème 6

Étant donné $u \in \mathcal{L}(E)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) u est diagonalisable,

(2) E est somme directe de sous-espaces vectoriels $E_1, E_2, \dots, E_p$ stables par u tels que chaque endomorphisme induit u_{E_i} soit une homothétie,

(3) E est somme directe de sous-espaces vectoriels $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et il existe $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in \mathbb{K}^p$ tel que, π_i étant la projection sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{1\leqslant j\leqslant p \\ j\neq i}} E_j$, on ait $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \pi_i$

Copyrighted material

☞ **(1) ⇒ (2)**

u étant diagonalisable, il existe $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ base de E formée de vecteurs propres de u.

En posant $E_i = \text{Vect}(e_i)$. $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, chaque E_i est stable par u, et u_{F_i} est l'homothétie de rapport λ_i valeur propre associée à e_i.

(2) ⇒ (1)

u_{F_i} étant l'homothétie de rapport λ_i, tout vecteur non nul de E_i est vecteur propre de u associé à la valeur propre λ_i. Une base de E, adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} E_i$ est alors formée de vecteurs propres de u.

(2) ⇒ (3)

Si $\mathcal{B}$ est une base de E adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} E_i$, on a en posant $m_i = \dim E_i$:

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} \lambda_2 I_{m_1} & & & (0) \\ & \lambda_2 I_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix}$$

En observant que $\text{mat}_{\mathcal{B}}\, \pi_i = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & I_{m_i} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ il vient $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \pi_i$

(3) ⇒ (2)

Chaque E_i est stable par chaque π_j ✎ (27) donc est stable par u. De plus, si $x \in E_i$, on a $\pi_j(x) = 0$ si $j \neq i$ et $\pi_i(x) = x$ donc $u(x) = \lambda_i x$ et u_{E_i} est l'homothétie de rapport λ_i.

✎ (27) $\pi_j(E_i)=\{0\}$ si $i\neq j$, $\pi_j(E_j)=E_j$.

Théorème 7

Étant donné $u \in \mathcal{L}(E)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) u est diagonalisable,

(2) E est somme directe des sous-espaces propres de u,

(3) le polynôme caractéristique χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et, pour toute valeur propre λ, on a $\dim E_u(\lambda) = m$, où m est l'ordre de multiplicité de λ.

☞ **(1) ⇒ (2)**

Soit $\text{Sp}(u) = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p\}$. $F = \bigoplus_{i=1}^{p} E_u(\mu_i)$. $\forall i \in [\![1, p]\!]$. $q_i = \dim E_u(\mu_i)$. ✎ (28)

Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E formée de vecteurs propres de u, $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de F, donc $\dim F \geqslant n$ et finalement $F = E$.

(2) ⇒ (1)

Les sous-espaces propres de u forment une famille $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de sous-espaces supplémentaires dans E tels que chaque restriction u_{E_i} soit une homothétie.

(2) ⇒ (3)

Soit u_i l'endomorphisme de $E_u(\mu_i)$ induit par u, u_i est l'homothétie $x \mapsto \mu_i x$.

On a $\chi_{u_i} = (\mu_i - X)^{q_i}$ et χ_{u_i} divise χ_u (propriété **25**).

Les χ_{u_i} étant scindés et sans racines communes, $\prod_{i=1}^{p} \chi_{u_i}$ divise χ_u.

✎ (28) L'hypothèse indique que $\text{Sp}(u)$ n'est pas vide.

Copyrighted material

D'autre part **(2)** donne $\sum_{i=1}^{p} q_i = n$ donc $\deg \prod_{i=1}^{p} \chi_{u_i} = n = \deg \chi_u$.

De plus, ces deux polynômes ont le même coefficient dominant $(-1)^n$,

donc $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} \chi_{u_i} = \prod_{i=1}^{p} (\mu_i - X)^{q_i}$. Ce qui montre **(3)**.

(3) $\Rightarrow$ **(2)**

D'après **(3)**, on a $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (\mu_i - X)^{q_i}$ avec $q_i = \dim E_u(\mu_i)$.

Alors $n = \deg \chi_u = \sum_{i=1}^{p} q_i = \sum_{i=1}^{p} \dim E_u(\mu_i) = \dim F$, donc $E = F$.

Théorème 8

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme Q scindé dans $\mathbb{K}[X]$ n'admettant que des racines simples et tel que $Q(u) = 0$.

(29) On conserve les notations de la démonstration précédente.

(29) ▪ Si u est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E formée de vecteurs propres de u et on a $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (\mu_i - X)^{q_i}$. Posons alors $Q = \prod_{i=1}^{p} (\mu_i - X)$. Il vient $Q(u) = (\mu_1 \operatorname{Id}_E - u) \circ (\mu_2 \operatorname{Id}_E - u) \circ \cdots \circ (\mu_p \operatorname{Id}_E - u)$, ces termes étant permutables.

Soit x vecteur propre associé à la valeur propre μ_i. On a :

$$Q(u)(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} (\mu_j \operatorname{Id}_E - u) \circ (\mu_i \operatorname{Id}_E - u)(x) = 0.$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Q(u)(e_i) = 0$ et donc $Q(u) = 0$.

▪ La fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{p} (\mu_i - X)}$ se décompose en éléments simples sous la forme : $F = \sum_{i=1}^{p} \dfrac{\alpha_i}{\mu_i - X}$. On en déduit l'identité : $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq i}} (\mu_j - X) = 1$, d'où avec les polynômes d'endomorphismes : $q_i(u) = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq i}} (\mu_j \operatorname{Id}_E - u)$, il vient :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i q_i(u) = \operatorname{Id}_E. \text{ Ainsi, pour tout } x \in E, \text{ on a } \quad x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i q_i(u)(x).$$

On vérifie que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $q_i(u)(x) \in \operatorname{Ker}(\mu_i \operatorname{Id}_E - u)$, en effet :

$$(\mu_i \operatorname{Id}_E - u) \circ q_i(u) = Q(u) = 0$$

Il en résulte que $E = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(\mu_i \operatorname{Id}_E - u)$ et comme on sait que cette somme est directe :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(\mu_i \operatorname{Id}_E - u)$$

Copyrighted material

Théorème 9

Pour que $u \in \mathscr{L}(E)$ soit diagonalisable, il suffit que χ_u admette n racines simples dans $\mathbb{K}$.

☞ χ_u est alors scindé et, d'après la propriété **26**, on a, pour toute valeur propre λ, $1 \leqslant \dim E_u(\lambda) \leqslant 1$, donc $\dim E_u(\lambda) = 1$ et la conclusion résulte du théorème **7**-(3).

Définition 17

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé est diagonalisable.

Propriété 27

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. ✎ (30)

Alors, $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ où les λ_i sont les valeurs propres de A.

✎ (30) Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

☞ P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une base de vecteurs propres.

2. Pratique de la diagonalisation

$$u \in \mathscr{L}(E). \quad A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

1) Calculer $\chi_u = \chi_A$ et factoriser dans $\mathbb{K}[X]$.

2) ▪ **Si χ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{K}[X]$**, A et donc u n'est pas diagonalisable.
▪ **Si χ_A est scindé dans $\mathbb{K}[X]$**, on détermine les sous-espaces propres.
Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\, u$, $E_u(\lambda)$ est défini par le système homogène $(A - \lambda I_n)X = 0$ donc :
$$\dim E_u(\lambda) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n).$$
Si λ est valeur propre simple, on sait que $\dim E_u(\lambda) = 1$, donc $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) = n - 1$.

3) Si, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\, u$, $\dim E_u(\lambda) = m$ (ordre de multiplicité de λ), ✎ (31) u et A sont diagonalisables et on obtient une base de E formée de vecteurs propres de u en «réunissant» des bases des $E_u(\lambda)$.

✎ (31) Ce qui est réalisé si toutes les valeurs propres sont simples.

Remarques

1) Si λ est valeur propre d'ordre n, la matrice A n'est diagonalisable que si $A = \lambda I_n$.

2) Si λ est valeur propre d'ordre $n-1$ et A diagonalisable, et on a $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) = 1$. ✎ (32)

3) Si λ est valeur propre simple, la matrice $A - \lambda I_n$ est de rang $n-1$. On en cherche le noyau ; celui-ci peut s'obtenir directement ✎ (33) en exhibant une combinaison linéaire nulle des vecteurs colonnes de $A - \lambda I_n$.

✎ (32) Dans ce cas, le sous-espace propre correspondant est un hyperplan.
✎ (33) Sans former le système homogène.

4) Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3 peut s'écrire sans l'aide des déterminants.
$$n = 2 \ : \ \chi_A(X) = X^2 - (\mathrm{Tr}\, A)X + \det A$$
$$n = 3 \ : \ \chi_A(X) = -X^3 + (\mathrm{Tr}\, A)X^2 - \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}\, A)X + \det A. \ ✎ (34)$$

✎ (34) On peut utiliser cette méthode à titre de vérification.

5) Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = A + \alpha I_n$, $(\alpha \in \mathbb{K})$, on a $\chi_B(X) = \chi_A(X - \alpha)$ et :
$$\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ P^{-1}BP = P^{-1}AP + \alpha I_n$$
Les matrices A et B ont les mêmes vecteurs propres, elles sont simultanément diagonalisables ou non.

Exemple 7 Pour quelles valeurs des paramètres réels a, b, c, d, e, f les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Copyrighted material

- $\chi_A(X) = (1-X)(2-X)^3$

1 est valeur propre simple donc $\dim E_A(1) = 1$.

2 est valeur propre triple, A sera donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ si et seulement si :

$$\dim E_A(2) = 3 \text{ c'est-à-dire si et seulement si } \operatorname{rg}(A - 2I_4) = 1$$

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \operatorname{rg}(A-2I_4) = 1 \iff d = e = f = 0$$

Dans ce cas, $E_A(2)$ est l'hyperplan d'équation $x - ay - bz - ct = 0$.

- $\chi_B(X) = (1-X)^2(2-X)^2$

1 et 2 sont valeurs propres doubles, B sera donc diagonalisable si et seulement si :

$$\dim E_B(1) = \dim E_B(2) = 2 \text{ c'est-à-dire si et seulement si } \operatorname{rg}(B - I_4) = \operatorname{rg}(B - 2I_4) = 2$$

$$B - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \operatorname{rg}(B - I_4) = 2 \iff a = 0$$

$$B - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \operatorname{rg}(B - 2I_4) = 2 \iff f = 0$$

Exemple 8 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\textbf{(1)} : (f - \mathrm{Id}_E)^3 \circ (f + 2\,\mathrm{Id}_E) = 0 \ , \ \textbf{(2)} : (f - \mathrm{Id}_E)^2 \circ (f + 2\,\mathrm{Id}_E) \neq 0$$

n'est pas diagonalisable.

De **(1)**, on déduit que $\operatorname{Sp}(f) \subset \{1, -2\}$ (cf. propriété **16**).

Si f était diagonalisable, on aurait $(f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + 2\,\mathrm{Id}_E) = 0$ (cf. démonstration du théorème **8**), donc on aurait $(f - \mathrm{Id}_E)^2 \circ (f + 2\,\mathrm{Id}_E) = 0$. Ainsi f est non diagonalisable.

Exemple 9 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^3 - A^2 - 4A + 4I = 0$ est diagonalisable.

La relation donnée s'écrit $P(A) = 0$ avec $P(X) = X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X-1)(X+2)(X-2)$.

La transcription matricielle du théorème **8** donne immédiatement que A est diagonalisable :

$$\operatorname{Sp}(A) \subset \{-2, 1, 2\}$$

Restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable

Théorème 10

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par u et v l'endomorphisme de F induit par u. Si u est diagonalisable, $v = u_F$ est également diagonalisable.

☞ D'après le théorème **8**, u étant diagonalisable, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ scindé et n'admettant que des racines simples tel que $Q(u) = 0$.

$Q(u) = 0$ donne $Q(v) = 0$ et, ✎ (35) v est diagonalisable.

✎ (35) Toujours d'après le théorème **8**.

Corollaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, diagonalisable, et F un sous-espace non nul de E. Alors,

F est stable par u si et seulement si F admet une base formée de vecteurs propres de u.

Copyrighted material

Exemple 10 Détermination des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\chi_A(X) = X(X-1)(2-X)$: ✎ (36) alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

✎ (36) A admet trois valeurs propres simples.

Sous-espaces propres :

$E_A(0)$ Équations : $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ Base : $c_1 = (1,-1,0)$

$E_A(1)$ Équations : $\begin{cases} y-z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ Base : $c_2 = (-1,1,1)$

$E_A(2)$ Équations : $\begin{cases} -x+y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ Base : $c_3 = (0,1,1)$

D'après le corollaire du théorème **10** :

- Les droites stables sont $D_i = \text{Vect}(c_i)$, $i \in \{1,2,3\}$.
- Les plans stables sont $P_1 = \text{Vect}(c_2, c_3)$, $P_2 = \text{Vect}(c_1, c_3)$, $P_3 = \text{Vect}(c_1, c_2)$.
- En adjoignant $\{0\}$ et $\mathbb{R}^3$, on a ainsi tous les sous-espaces stables.

3. Trigonalisation

Définition 18

$u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **trigonalisable** si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

Remarque

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1)$.

Si $\text{mat}_{\mathcal{B}} u$ est triangulaire supérieure, $\text{mat}_{\mathcal{B}'} u$ est triangulaire inférieure. ✎ (37)

✎ (37) Conséquence : $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Définition 19

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé est trigonalisable.

Donc A est trigonalisable ✎ (38) si et seulement si il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

✎ (38) A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Exemple 11 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable, son polynôme caractéristique χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Si A est trigonalisable, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T$ où T est triangulaire supérieure.

Avec $T = [t_{ij}]$ on a $i > j \Rightarrow t_{ij} = 0$ et $\chi_A = \chi_T = \prod_{i=1}^{n} (t_{ii} - X)$

Exemple 12 a) Calculer les valeurs propres et sous-espaces propres de $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ -7 & 1 & -6 \\ -10 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ et justifier que A n'est pas diagonalisable.

b) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \text{mat}_{(e_1)} f$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors, si u_1 et u_2 sont deux vecteurs propres de f linéairement indépendants, (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\text{mat}_{(u_1,u_2,u_3)} f$ est triangulaire supérieure.

c) Montrer qu'il existe u_3 tel que (u_1, u_2, u_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$ et :

$$\text{mat}_{(u_1,u_2,u_3)} f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Copyrighted material

a) On obtient successivement :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 1 & 6 \\ -7 & 1-\lambda & -6 \\ -10 & -1 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ -7 & 1-\lambda & -6 \\ -10 & -1 & -7\lambda \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2)$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 \\ 9 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -6 \\ 2-\lambda & -7-\lambda \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2)$$

$$= -(2-\lambda)^2(1+\lambda)$$

Les valeurs propres sont -1 (simple) et 2 (double).

Sous-espaces propres

- $(A + I_3)X = 0 \iff \begin{cases} 10x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \\ -7x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

$\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est une droite dirigée par $u_1 = -2e_1 + 2e_2 + 3e_3$.

- $(A - 2I_3)X = 0 \iff \begin{cases} 7x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \\ -10x_1 - x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

$\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est une droite dirigée par $u_2 = e_1 - e_2 - e_3$.

- $\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est de dimension 1 alors que 2 est valeur propres d'ordre 2, f (et donc A) n'est pas diagonalisable.

b) Calculons $\det_{(e_1,e_2,e_3)}(u_1, u_2, e_1) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ donc (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$. On sait que $f(u_1) = -u_1$, $f(u_2) = 2u_2$, exprimons maintenant $f(e_1)$ en fonction de (u_1, u_2, e_1).

On a $f(e_1) = 9e_1 - 7e_2 - 10e_3$ et il faut trouver $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$f(e_1) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma e_1$$

c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ -10 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où $\alpha = -3,\ \beta = 1,\ \gamma = 2.$

En conclusion $\mathrm{mat}_{(u_1,u_2,e_1)} f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Nécessairement u_3 doit vérifier $f(u_3) = 2u_3 + u_2$

En écrivant $u_3 = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ on obtient le système :

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 6x_3 = 1 \\ -7x_1 - x_2 - 6x_3 = -1 \\ -10x_1 - x_2 - 9x_3 = -1 \end{cases}$$

qui est visiblement équivalent à :

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 6x_3 = 1 \\ -10x_1 - x_2 - 9x_3 = -1 \end{cases}$$

donc aussi à $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

Une solution est, par exemple, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$ c'est-à-dire $u_3 = e_1 - e_3$.

On vérifie alors que $\det_{(e_1,e_2,e_3)}(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$ est non nul donc (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et sur cette base, on a :

$$\mathrm{mat}_{(u_1,u_2,u_3)} f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Copyrighted material

Théorème 11

✎ (39) $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si χ_u ✎ (40) est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme de E est donc trigonalisable.

✎ (39) La connaissance de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

✎ (40) Polynôme caractéristique de u.

☞ • Condition nécessaire : s'il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{n1} \\ (0) & \ddots & \vdots \\ & & t_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{alors } \chi_u(X) = \prod_{i=1}^{n} (t_{ii} - X).$$

• Condition suffisante. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et tout endomorphisme u de E, si $\chi_u(X)$ est scindé, u est trigonalisable.

Supposons $\mathcal{P}(n-1)$ vraie. Soit alors E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_u(X)$ soit scindé. $\chi_u(X)$ admet au moins une racine $\lambda \in \mathbb{K}$ ✎ (41)

✎ (41) Une seule lorsque $\chi_u(X) = (\lambda - X)^n$.

Soit c_1 un vecteur propre de u associé à λ et $\mathcal{B} = (c_1, c_2', c_3', \dots, c_n')$ une base de E.

$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0_{n-1,1} & A \end{pmatrix}$, $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ donc :

$$\chi_u(X) = (\lambda - X)\det(A - XI_{n-1}).$$

Soit $F = \mathrm{Vect}(c_2', c_3', \dots, c_n')$, $v = u_{|F}$, p la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(c_1)$ et $w = p \circ v$. On a $w \in \mathcal{L}(F)$ et $A = \mathrm{mat}_{(c_i')_{2 \le i \le n}} w$.

D'après $\mathcal{P}(n-1)$, il existe $(c_2, c_3, \dots, c_n)$ base de F telle que :

$$\mathrm{mat}_{(c_i)_{2 \le i \le n}} w = T \in \mathcal{M}_{n-1}(K) \text{ avec } T \text{ triangulaire supérieure.}$$

Il est maintenant immédiat que $\mathcal{B}' = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ est une base de E.

Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on a $u(c_i) = v(c_i) = p \circ v(c_i) + \alpha_i c_1$, $(\alpha_i \in \mathbb{K})$, soit

$u(c_i) = w(c_i) + \alpha_i c_1$, donc $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} u = \begin{pmatrix} \lambda & L' \\ 0_{n-1,1} & T \end{pmatrix}$ avec $L' = (\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$.

$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} u$ est triangulaire supérieure, ce qui montre que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Par récurrence, ✎ (42) $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

✎ (42) $\mathcal{P}(1)$ est évidente.

Remarques

• La démonstration du théorème **11** fournit une méthode pratique de trigonalisation :

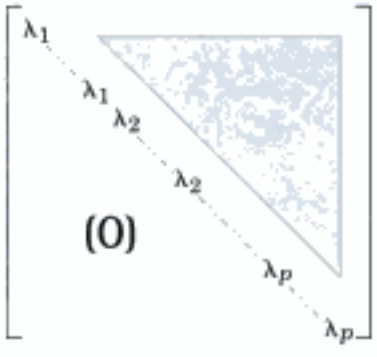
1) On choisit une valeur propre λ et on détermine c_1 vecteur propre associé.

2) On détermine $v = u_{|F}$ (notations de la démonstration)

3) On choisit μ valeur propre de v (donc de u) et on recommence l'opération.

Il en résulte que l'on peut construire T avec une diagonale ordonnée de façon arbitraire.

En particulier, si $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{m_i}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_p$ valeurs propres distinctes de u, d'ordres de multiplicité $m_1, m_2, \dots, m_p)$, on pourra toujours trouver T de la forme :



λ_1	figure	m_1	fois
λ_2	figure	m_2	fois
...	...	...	
λ_p	figure	m_p	fois

Copyrighted material

Exemple 13 Trigonalisation de $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$

On a $\chi_A(X) = (1-X)^3$: 1 est valeur propre triple, A n'est donc pas diagonalisable [43]

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} u$ où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ est de dimension 1 : $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(c_1)$ avec $c_1 = e_1 + e_2 + 2e_3$.

$\mathcal{B}' = (c_1, e_2, e_3)$ est une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$.

$u(e_2) = -e_1 - 6e_2 - 6e_3 = -c_1 - 5e_2 - 4e_3$

$u(e_3) = 2e_1 + 11e_2 + 11e_3 = 2c_1 + 9e_2 + 7e_3$

$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} u = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} = A'$.

Posons $F = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$, $v = u_{|F}$, $w = p \circ v$ où p est la projection sur F parallèlement à c_1.

On a $\mathrm{mat}_{(e_2,e_3)} w = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = B$ puis $\chi_B(X) = (1-X)^2$. [44]

On trouve $\mathrm{Ker}(w - \mathrm{Id}_F) = \mathrm{Vect}(c_2)$ avec $c_2 = 3e_2 + 2e_3$.

Dans la base (c_2, e_3) de F la matrice de w est triangulaire supérieure, de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

donc dans la base $\mathcal{B}'' = (c_1, c_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ la matrice de u est triangulaire supérieure. [45]

On a alors :

$u(c_2) = 3u(e_2) + 2u(e_3) = c_1 + 3e_2 + 2e_3$ (d'après la matrice A')

$u(c_2) = c_1 + c_2$

$u(e_3) = 2c_1 + 9e_2 + 7e_3$ (d'après la matrice A')

$u(e_3) = 2c_1 + 3c_2 + e_3$

Finalement $\mathrm{mat}_{(c_1,c_2,c_3)} u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$ et $T = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

[43] Sinon, on aurait $A = I_3$.

[44] Sans calcul car $\chi_A(X) = \chi_u(X) = (1-X)\chi_B(X)$.

[45] Démonstration du théorème 11.

4. Le théorème de Cayley-Hamilton [46]

[46] La preuve de ce théorème est hors programme

Théorème 12

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\chi_u(u) = 0$.

Corollaire

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\chi_A(A) = 0$.

Exemple 14 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u^p \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n-1})$.

b) Application : soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$, écrire A^p en combinaison linéaire de I_3, A et A^2.

a) La division euclidienne de X^p par χ_u s'écrit : $X^p = \chi_u Q + R$, $\deg R < \deg \chi_u$. [47]

On en déduit $u^p = \chi_u(u) \circ Q(u) + R(u) = R(u)$ d'après le théorème de Cayley – Hamilton,

ou encore, en posant $R = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$: $u^p = \sum_{k=0}^{n-1} a_p u^k$.

b) Dans l'exemple proposé : $\chi_A(X) = -X(X-1)(X-2)$.

La division euclidienne de X^p par $\chi_A(X)$ s'écrit $X^p = \chi_A(X)Q(X) + aX^2 + bX + c$

On obtient : [48] $\begin{cases} 0 = c \\ 1 = a + b + c \\ 2^p = 4a + 2b + c \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = 2^{p-1} - 1 \\ b = 2 - 2^{p-1} \\ c = 0 \end{cases}$

et $A^p = \left(2^{p-1} - 1\right) A^2 + \left(2 - 2^{p-1}\right) A$.

[47] $\deg R \leqslant n-1$.

[48] En substituant successivement à X les valeurs 0, 1 et 2.

Copyrighted material

Hidden page

Deuxième calcul

✎ (53) Notons $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ associé à A dans la base canonique $\mathcal{B}$: $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, u$.

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ les valeurs propres distinctes de A.

✎ (53) L'exemple précédent met en évidence que la méthode «par diagonalisation effective» est bien plus laborieuse que celle qui utilise le théorème de Cayley-Hamilton.

D'après le théorème **6**, on sait que u s'écrit : $u = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i p_i$ où pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, p_i est la projection sur $E_u(\lambda_i) = \mathrm{Ker}\left(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E\right)$ parallèlement à la somme $\bigoplus_{\substack{1 \leqslant j \leqslant q \\ j \neq i}} E_u(\lambda_j)$ des autres sous-espaces propres.

Il en résulte : $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^k p_i$ **(2)**.

Conséquence pratique : il existe q matrices de projection $\Pi_1, \ldots, \Pi_q$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^k \Pi_i \qquad \textbf{(3)}$$

On peut, par exemple, calculer les matrices Π_i en résolvant le système obtenu en écrivant la relation **(3)** pour $i = 1, 2, \ldots, q$.

Exemple 17 Calcul de $\lim_{n \to +\infty} A^n$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On a $\chi_A(X) = (1 - X)\left(X^2 + X + \frac{1}{2}\right)$. Donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. ✎ (54)

✎ (54) χ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

En revanche, dans $\mathbb{C}[X]$: $\chi_A(X) = (1 - X)\left(X + \frac{1+i}{2}\right)\left(X + \frac{1-i}{2}\right)$, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Les trois valeurs propres distinctes sont : 1, $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{3i\frac{\pi}{4}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-3i\frac{\pi}{4}}$.

D'après l'étude précédente, il existe trois matrices de projection : Π_1, Π_2, Π_3 telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \Pi_1 + 2^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{3ni\pi}{4}} \Pi_2 + 2^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{3ni\pi}{4}} \Pi_3$$

✎ (55) En écrivant cette relation pour n=0, n=1 et n=2.

✎ (55) On obtient un système qui fournit Π_1, Π_2, Π_3.

$$\begin{cases} \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = I_3 \\ \Pi_1 - \frac{1-i}{2}\Pi_2 - \frac{1+i}{2}\Pi_3 = A \\ \Pi_1 - \frac{i}{2}\Pi_2 + \frac{i}{2}\Pi_3 = A^2 \end{cases}$$

Remarquons que $\lim_{n \to +\infty} A^n = \Pi_1$, donc seul le calcul de Π_1 est utile, et on obtient :

$$\Pi_1 = \frac{1}{5}\left(I_3 + 2A + 2A^2\right)$$

Il reste à calculer $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ pour conclure à $\lim_{n \to +\infty} A^n = \Pi_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1.3 – Utilisation d'une trigonalisation

Conformément au programme, nous nous limiterons à des exemples simples.

Cas particulier : A admet une seule valeur propre : $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe alors

$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & & \cdots \\ (0) & \ddots & \ddots \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ donc $P^{-1}AP = \lambda I_n + N$ avec N nilpotente.

On en déduit $A = \lambda I_n + B$ avec $B = PNP^{-1}$ nilpotente. ✎ (56)

✎ (56) $\forall p \in \mathbb{N}$, $B^p = PN^pP^{-1}$.

Copyrighted material

I_n et B étant permutables, on obtient [57] : $\forall p \in \mathbb{N}, A^p = \sum_{j=0}^{p} \mathrm{C}_p^j \lambda^{p-j} B^j$.

[57] Formule du binôme de Newton.

Soit alors r l'indice de nilpotence de B (on sait que $r \leqslant n$) : on a $B^j = 0$ pour tout $j \geqslant r$.

Il en résulte que, pour tout $p \geqslant r$, $A^p = \sum_{j=0}^{r} \mathrm{C}_p^j \lambda^{p-j} B^j$ avec $B = A - \lambda I_n$.

Exemple 18 Calcul de A^n, $n \in \mathbb{N}$, pour $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$. [58]

[58] Voir l'exemple 11.

On a vu que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$T = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente d'indice 3 car $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

donc $B = A - I_3$ est nilpotente d'indice 3.

On obtient alors $A^n = (I_3 + B)^n = I_3 + nB + \dfrac{n(n-1)}{2} B^2$ donc :

$$A^n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} I_3 - n(n-2)A + \frac{n(n-1)}{2} A^2.$$

Compte tenu de $A^2 = \begin{pmatrix} -9 & -4 & 7 \\ -34 & -15 & 25 \\ -36 & -16 & 27 \end{pmatrix}$, il vient finalement :

$$A^n = \begin{pmatrix} -2n^2 - n + 1 & -n^2 & \dfrac{3n^2 + n}{2} \\ -2n^2 - 13n & -n^2 - 6n + 1 & \dfrac{3n^2 + 19n}{2} \\ -4n^2 - 10n & -2n^2 - 4n & 3n^2 + 7n + 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 19 Calcul de A^n, $n \in \mathbb{N}$, pour $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) On obtient sans difficulté $\chi_A(X) = (1 - X)^2(2 - X)$.

Sous-espaces propres

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f = A$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

$E_A(2) = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(c_1)$ avec $c_1 = (1, 1, 2)$

$E_A(1) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(c_2)$ avec $c_2 = (-1, 2, 0)$

On a ici $\dim E_A(1) < 2$, f (donc A) n'est pas diagonalisable.

Trigonalisation : Première méthode

En procédant comme dans l'exemple 12, le problème revient à trouver une base (u_1, u_2, u_3) telle que :

$$f(u_1) = 2u_1 \ , \ f(u_2) = u_2 \ , \ f(u_3) = u_2 + u_3$$ [59]

[59] On recherche une réduite triangulaire la plus simple possible.

Nécessairement $u_1 \in \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $u_2 \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

Prenons donc $u_1 = c_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = c_2 = (-1, 2, 0)$ et posons $u_3 = (x, y, z)$.

La conditions $f(u_3) - u_3 = u_2$ s'écrit :

$$\begin{cases} 6x + 3y - 4z = -1 \\ -6x - 3y + 5z = 2 \\ 4x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{ce qui donne} \quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Une solution est par exemple $u_3 = (0, 1, 1)$.

(u_1, u_2, u_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$: $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

et par définition de u_1, u_2, u_3 on a : $\mathrm{mat}_{(u_1, u_2, u_3)} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$

Copyrighted material

donc avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = T$.

Trigonalisation : Deuxième méthode

Comme 1 est racine double de $\chi_A(X)$, on cherche une base de $\operatorname{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)^2$. Pour cela, formons donc :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -6 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } (A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)^2$ est le plan d'équation $2x + y - z = 0$

Une base de ce plan est (c_2, c_3) avec $c_3 = (0, 1, 1)$.

Par construction, on a :

$$f(c_1) = 2c_1,\ f(c_2) = c_2,\ f(c_3) = f(e_2 + e_3) = -e_1 + 3e_2 + e_3 = c_2 + c_3,$$

et on vérifie facilement que (c_1, c_2, c_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. [60]

Ainsi, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, il vient $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[60] La méthode est générale : avec $\chi_A(X) = (1-X)^2(2-X)$, on peut déduire du théorème de Cayley-Hamilton que : $E = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2 \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

2) En écrivant $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, la formule du binôme donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = I_2 + n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $A^n = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$.

Le calcul fournit $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ d'où :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 4n - 1 & 2^n + 2n - 1 & -2^n - 3n + 1 \\ 2^{n+1} - 8n - 2 & 2^n - 4n & -2^n + 6n + 1 \\ 2^{n+2} - 4 & 2^{n+1} - 2 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}$$

2. Étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Le but est de retrouver, grâce au calcul matriciel, l'expression du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. [61]

[61] Ces suites ont été étudiées en première année (voir Analyse-Géométrie, PCSI ou MPSI).

2.1 – Généralités – Rappels

Étant donné des éléments a et b fixés de $\mathbb{K}$ avec $b \neq 0$, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

- $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- L'application $\Phi : (u_n)_{\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{K}^2$.
- $\mathcal{S}$ est de dimension 2.
- Deux suites $u = (u_n)_{\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}$ forment une base de $\mathcal{S}$ si et seulement si leurs images par Φ forment une base de $\mathbb{K}^2$ donc si et seulement si $\begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \neq 0$.
- Une suite géométrique $(r^n)_{\mathbb{N}}$, $r \neq 0$, appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si r est solution de :

$$(\mathscr{C}) \quad r^2 - ar - b = 0$$ [62]

- En observant que l'ensemble des suites réelles solutions de la récurrence est inclus dans l'ensemble des suites complexes solutions de la même récurrence, on peut limiter l'étude à $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

[62] $(\mathscr{C})$ est l'**équation caractéristique** de la récurrence.

Copyrighted material

Premier cas : $A = a^2 + 4b \neq 0$

$\mathcal{S}$ contient deux suites géométriques non nulles $(r_1^n)_{\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{\mathbb{N}}$ où r_1 et r_2 sont les racines distinctes de $(\mathcal{C})$.

Ces deux suites forment une base de $\mathcal{S}$, car $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_1 - r_2 \neq 0$ et pour tout $(u_n)_{\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}$ il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

Le calcul de λ et μ se fait en résolvant le système : $\begin{cases} \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1 \\ \lambda + \mu = u_0 \end{cases}$

Deuxième cas : $\Delta = a^2 + 4b = 0$ (donc $a \neq 0$, puisque l'on a supposé $b \neq 0$).

$\mathcal{S}$ contient une seule suite géométrique non nulle $(r^n)_{\mathbb{N}}$ avec $r = \dfrac{a}{2}$ racine double de $(\mathcal{C})$.

Une base de $\mathcal{S}$ est alors formée par les suites $(r^n)_{\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{\mathbb{N}}$ et pour tout $(u_n)_{\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$.

Pour obtenir λ et μ on résoud maintenant le système : $\begin{cases} \lambda r + \mu r = u_1 \\ \lambda = u_0 \end{cases}$

2.2 – Calcul du terme général, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Soit $u = (u_n)_{\mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{S}$ défini par la donnée de $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

À la suite u, on associe une suite vectorielle $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^2$, en posant :

$$\forall n \geqslant 1,\ V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

cette suite associée vérifie donc : $\forall n \geqslant 1,\ V_{n+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} V_n$. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et on obtient : $\forall n \geqslant 1,\ V_n = A^{n-1} V_1$. Le problème est ainsi ramené au calcul des puissances successives de la matrice A dont le polynôme caractéristique est :

$$\chi_A = \det(A - XI_2) = X^2 - aX - b.$$

Premier cas : $\Delta = a^2 + 4b \neq 0$.

La matrice A a deux valeurs propres distinctes r_1 et r_2. On remarque qu'elles sont non nulles (car $b \neq 0$) et que ce sont les racines de l'équation $(\mathcal{C})$.

Dans ce cas, A est diagonalisable et on obtient : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En conséquence : $A^n = P \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$, $P^{-1} = \dfrac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix}$, donc :

$$A^n = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1^{n+1} - r_2^{n+1} & -r_1 r_2 \left(r_1^n - r_2^n\right) \\ r_1^n - r_2^n & -r_1 r_2 \left(r_1^{n-1} - r_2^{n-1}\right) \end{pmatrix}$$

et avec $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ on en déduit : $u_n = \dfrac{u_1 - r_2 u_0}{r_1 - r_2} r_1^n + \dfrac{r_1 u_0 - u_1}{r_1 - r_2} r_2^n$.

Deuxième cas : $\Delta = a^2 + 4b = 0$.

Posons alors $a = 2r$, on a donc $b = -r^2$. La matrice A s'écrit $A = \begin{pmatrix} 2r & -r^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et admet r pour valeur propre double. A n'est pas diagonalisable, mais on peut former une réduite triangulaire.

Compte tenu de $A \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on pose $P = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; alors $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -r \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix} = T$.

Avec $T^n = \left(rI_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^n = \begin{pmatrix} r^n & nr^{n-1} \\ 0 & r^n \end{pmatrix}$, et $A^n = PT^nP^{-1}$, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} (n+1)r^n & -nr^{n+1} \\ nr^{n-1} & -(n-1)r^n \end{pmatrix}.$$

Finalement $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ donne :

$$u_n = n\,r^{n-1} u_1 - (n-1) r^n u_0 \text{ ou encore } \quad u_n = u_0 r^n + \left(\frac{u_1}{r} - u_0\right) n\,r^n.$$

Copyrighted material

L'essentiel

I. Éléments propres, diagonalisation

✔ **Si l'on veut** montrer que des vecteurs sont indépendants,

▪ **on peut** examiner s'ils sont dans des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 1

✔ **Si l'on veut** diagonaliser une matrice carré d'ordre n,

▪ **on peut** la décomposer en $A = \mu I_n + B$, où B est aisément diagonalisable.

✔ **Si l'on veut** diagonaliser une matrice B

▪ **on peut** étudier des propriétés apparentes de B.

✔ Il n'est pas toujours indispensable de former le polynôme caractéristique.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 2

✔ **Si l'on veut** montrer qu'une matrice est diagonalisable,

▪ **on peut** montrer qu'elle a un polynôme annulateur scindé et à racines simples.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 3, 4

II. Trigonalisation

✔ Une matrice est trigonalisable si et seulement si elle admet un polynôme annulateur scindé.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 5, 6

✔ **Si l'on veut** trouver une matrice triangulaire semblable à une matrice A,

▪ **on peut** étudier $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^k$ où λ est valeur propre de multiplicité k.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 6, 7

III. Théorème de Cayley-Hamilton

✔ Il s'agit d'un moyen particulièrement efficace pour obtenir un polynôme annulateur d'une matrice carrée.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 6, 7, 8

✔ **Si l'on veut** écrire l'espace E en somme directe de sous-espaces stables par un endomorphisme u,

▪ **on peut** former le polynôme caractéristique de u et pour chaque racine a_k d'ordre k, préciser $\mathrm{Ker}(u - a_k\,\mathrm{Id})^k$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 7

✔ **Si l'on veut** calculer les puissances d'une matrice A,

▪ **on peut** diviser X^k par le polynôme caractéristique de A et utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 8

IV. Sous-espaces stables

✔ Les vecteurs propres donnent les droites stables.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 10

✔ **Si l'on veut** déterminer, en dimension finie, les hyperplans stables par un endomorphisme de matrice A,

▪ **on peut** étudier les valeurs propres de la transposée de A.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 9, 10

Copyright © Vuibert

Mise en œuvre

I. Éléments propres, diagonalisation

Ex. 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit f_n et g_n dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définies par $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \cos nx$ et $g_n(x) = \sin nx$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, g_1, f_2, g_2, \cdots, f_n, g_n)$ est libre.

Indications

f_n et g_n sont vecteurs propres de l'opérateur dérivation à l'ordre 2.

Des sous-espaces propres de valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Solution

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $d \in \mathcal{L}(E)$, $d : f \mapsto f''$, on a

$\forall k \in \mathbb{N}, f_k'' = -k^2 f_k$, $g_k'' = -k^2 g_k$.

Ainsi f_k et g_k sont vecteurs propres de d associés à la valeur propre $-k^2$.

D'autre part, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, (f_k, g_k) est libre.

En effet, $\lambda f_k + \mu g_k = 0$ impose $\lambda = 0$, puis $\mu = 0$.

Les sous-espaces propres $E_d(0)$, $E_d(-1)$, $E_d(-4)$, $\cdots$, $E_d(-n^2)$ étant en somme directe, il vient alors que $(f_0, f_1, g_1, g_2, \cdots, f_n, g_n)$ est libre.

Commentaires

Faire $x=0$ dans $\lambda \cos kx + \mu \sin kx = 0$.

Ex. 2

$A = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 16 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 16 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Étudier la diagonalisation de A.

Indications

A est la somme de $15I_4$ et d'une matrice B aisément diagonalisable.

Pour simplifier les notations, on identifie B et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ qui lui est associé dans la base canonique.

Un vecteur propre de B associé à une valeur propre non nulle est à rechercher dans $\operatorname{Im} B$.

Solution

$A = 15I_4 + B$, avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc la diagonalisation de A se ramène à celle de B.

Et la diagonalisation de B peut s'effectuer par des remarques simples.

0 est valeur propre de B. Le sous-espace propre associé $E_B(0) = \operatorname{Ker} B$ a pour équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

Une base de $E_B(0)$ est, par exemple, (c_1, c_2, c_3) :

$c_1 = (1, -1, 0, 0)$, $c_2 = (1, 0, -1, 0)$, $c_3 = (1, 0, 0, -1)$.

Commentaires

Pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $P^{-1}AP = 15I_4 + P^{-1}BP$.

Sans calcul de polynôme caractéristique

B est visiblement de rang 1.

Copyrighted material

Hidden page

II. Trigonalisation

Ex. 5

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \\ -3 & 3 & 15 \end{pmatrix}$ ou $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles trigonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Indications

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puisque son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}$. La question ici posée revient à examiner si ce polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$.

Solution

1) $\begin{vmatrix} -X & 1 & 2 \\ -2 & 3-X & 6 \\ -3 & 3 & 15-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 2 \\ 1-X & 3-X & 6 \\ 0 & 3 & 15-X \end{vmatrix}$ conduit à

$\det(A - XI_3) = (1-X)(X^2 - 17X + 18)$.

Et $X^2 - 17X + 18$ est scindé dans $\mathbb{R}$.

Alors A est diagonalisable puisque son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

2) $\begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & -1 & -X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2+1)$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$,

donc B n'est pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Commentaires

Colonne 1 + colonne 2.

Discriminant positif.

Donc trigonalisable !

Ex. 6

1) Calculer le polynôme caractéristique χ_A de $A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -3 \\ -17 & 13 & -7 \\ -13 & 9 & -11 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

A est-elle diagonalisable ?

2) Prouver qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B = A - \lambda I_3$ soit nilpotente.

3) En déduire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Indications

On peut utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour obtenir un polynôme annulateur de A.

Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$, il existe une base $\left(a, f(a), f^2(a)\right)$.

Solution

1) On obtient $\chi_A(X) = (1-X)^3$: 1 est valeur propre triple, A n'est donc pas diagonalisable.

2) On a $(A - I_3)^3 = 0$ donc $B = A - I_3$ est nilpotente.

Le calcul donne $B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$: B est nilpotente d'indice 3.

Commentaires

Sinon, on aurait $A = I_3$.

Théorème de Cayley-Hamilton.

Copyrighted material

Hidden page

2) Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) \cap \operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$. Alors :

$f^2(x) - 8f(x) + 16x = 0$ et $f(x) = 2x$, donc $f^2(x) = 4x$, donne $x = 0$. — Les deux sous-espaces ont une somme directe.

$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ est visiblement de rang 2, donc :

$$\dim \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 1.$$

$(A - 4I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc :

$$\dim \operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})^2) = 2.$$

En conclusion, on a $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$. — Caractérisation de sous-espaces supplémentaires

- $\operatorname{Ker}\left(f - 4\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)^2$ est stable par f. — f et $(f - 4\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$ commutent.

Ce qui assure l'existence de g endomorphisme de F_2 induit par f.

Pour $x \in F_2$, on a $\left(f - 4\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)^2(x) = 0$ donc $\left(g - 4\operatorname{Id}_{F_2}\right)^2(x) = 0$

ce qui prouve $\left(g - 4\operatorname{Id}_{F_2}\right)^2 = 0$.

- On a $\dim F_2 = 2$ et $\dim \operatorname{Ker}\left(g - 4\operatorname{Id}_{F_2}\right) = 1$ donc $h = g - 4\operatorname{Id}_{F_2}$ est un endomorphisme de F_2 nilpotent d'indice 2 : $h^2 = 0$ et $h \neq 0$. — Voir la première question.

Il existe $b \in F_2$ tel que $h(b) \neq 0$, $\left(h(b), b\right)$ est une base de F_2 telle que :

$$\operatorname{mat}_{(h(b),b)} h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \operatorname{mat}_{(h(b),b)} g = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soit a un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2. — $F_1 = \mathbb{R}a$.

$\left(a, f(b), b\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et : $\operatorname{mat}_{(a,f(b),b)} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

- Le calcul de $(A - 4I_3)^2$ montre que une base de F_2 est (u, v) avec $u = (1, 1, 0)$ et $v = (1, -1, 1)$. — Calcul fait en début de question.

On obtient $\left(g - 4\operatorname{Id}_{F_2}\right)(u) = (3, -3, 3)$, on prendra donc

$$b = (1, 1, 0) \ , \ h(b) = (3, -3, 3).$$

De plus $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ d'où :

$$F_1 = \mathbb{R}a \text{ avec } a = (1, 1, 1).$$

Finalement $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ donne $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. — $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Ex. 8

Calculer A^n pour $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Indications

On divise X^n par le polynôme caractéristique de A et on utilise le théorème de Cayley-Hamilton.

Copyrighted material

Solution

On trouve $P_A(X) = -(X+1)^3$. La division euclidienne de X^n par $(X+1)^3$ s'écrit :

$$X^n = (X+1)^3 Q(X) + aX^2 + bX + c \qquad (1)$$

On en déduit :

$$nX^{n-1} = 3(X+1)^2 Q(X) + (X+1)^3 Q'(X) + 2aX + b \qquad (2)$$

et

$$n(n-1)X^{n-2} = 6(X+1)Q(X) + 6(X+1)^2 Q'(X) + (X+1)^3 Q''(X) + 2a \qquad (3)$$

On obtient : $\begin{cases} (-1)^n = a - b + c \\ n(-1)^{n-1} = -2a + b \\ n(n-1)(-1)^{n-2} = 2a \end{cases}$ d'où

$$a = \frac{(-1)^n}{2} n(n-1),\ b = (-1)^n n(n-2),\ c = \frac{(-1)^n}{2}(n-1)(n-2).$$

On en déduit :

$$A^n = \frac{(-1)^n}{2} n(n-1)A^2 + (-1)^n n(n-2)A + \frac{(-1)^n}{2}(n-1)(n-2)I_3$$

$$A^n = \frac{(-1)^n}{2} n(n-1) \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^n n(n-2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{2}(n-1)(n-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis $A^n = \frac{(-1)^n}{2} \begin{pmatrix} 2n^2 - 8n + 2 & -n^2 + 3n & n^2 - 5n \\ 2n^2 - 12n & -n^2 + 5n + 2 & n^2 - 7n \\ -2n^2 + 4n & n^2 - n & -n^2 + 3n + 2 \end{pmatrix}$.

Commentaires

Par deux dérivations successives.

En substituant à X la valeur -1 dans (1), (2) et (3).

Théorème de Cayley - Hamilton.

IV. Sous-espaces stables

Ex. 9

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A.

Montrer qu'un plan $\mathcal{P}$, d'équation $ax + by + cz = 0$, est stable par u si et seulement si le vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est vecteur propre de ${}^tA$.

Indications

Par nature, on a $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ dans une équation de plan.

Si des formes linéaires φ et ψ vérifient $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\psi$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

Solution

Soit φ la forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ de noyau $\mathcal{P}$.

Dire que $\mathcal{P}$ est stable par u équivaut à :

$$\forall X \in \mathbb{R}^3,\ {}^tLX = 0 \ \Rightarrow\ {}^tLAX = 0,$$

Commentaires

Dans la base duale canonique, sa matrice est L avec ${}^tL = [a\ \ b\ \ c]$.

On identifie un vecteur et sa matrice.

Copyright

c'est-à-dire $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\psi$, en notant ψ la forme linéaire de matrice ${}^tAL$.
Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

Rappel en indications.

Cela équivaut à ${}^tAL = \lambda L$, ce qui exprime que L est vecteur propre de ${}^tA$.

Ex. 10

Déterminer les droites et les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Indications

Usuellement, on identifie un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ et sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Les droites stables sont les sous-espaces engendrés par les vecteurs propres.
Pour les plans stables, l'exercice précédent donne une méthode simple.

Solution

Le polynôme caractéristique de A est $(1-X)(3-X)^2$.

$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ montrent que

$A-3I_3$ est de rang 2, donc A n'est pas diagonalisable.

les sous-espaces propres sont $E_1 = \mathbb{R}(1,-1,0)$ et $E_2 = \mathbb{R}(1,1,0)$.

Ce sont les droites stables.

A et ${}^tA$ ont même polynôme caractéristique.

Donc ${}^tA$ n'a que deux directions propres.

${}^tA - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et ${}^tA - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ montrent que

les sous-espaces propres sont $E_1' = \mathbb{R}(1,-1,0)$ et $E_2' = \mathbb{R}(0,0,1)$.

Les plans stables par A sont donc ceux d'équations $x - y = 0$ et $z = 0$.

Commentaires

Copyrighted material

Exercices

Niveau 1

Ex. 1

Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & \iddots & \\ & & a+b & & \\ & \iddots & & \ddots & \\ b & & & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n-1}(\mathbb{R}).$$

Ex. 2

Soit u, v, f trois endomorphismes de E,

$\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie tels qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ avec :

$f = \lambda u + \mu v, f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v, f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v$ **(1)**

Montrer que f est diagonalisable.

Ex. 3

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et montrer que l'on peut choisir la matrice de passage telle que $P^{-1} = P$.

Ex. 4

Trouver les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par u canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ex. 5

Trouver les puissances de $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Niveau 2

Ex. 6

Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Ex. 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = {}^t\mathrm{Com}\, A$. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B.

Ex. 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ deux matrices diagonalisables. Montrer que

$C = \begin{pmatrix} b_1 A & b_2 A \\ b_3 A & b_4 A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

Ex. 9

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B^2 = A$.

Montrer que B est diagonalisable.

2) Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Ex. 10

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et u, f, g des endomorphismes de E tels que $u \circ f = g \circ u$ et $\mathrm{rg}(u) = r \geqslant 1$.

Montrer que f et g ont au moins r valeurs propres communes.

Ex. 11

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Trouver les matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = A$ **(1)**

Copyrighted material

Niveau 3

Ex. 12

Soit f et g deux endomorphismes permutables d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie ($f \circ g = g \circ f$).

1) Montrer que f et g ont au moins un vecteur propre commun.

2) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires supérieures.

3) Montrer que si f et g sont diagonalisables, il existe une base de E dans laquelle les matrices f et g sont diagonales.

Ex. 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. On pose :

$\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) / u \circ v = v \circ u\}$ (ensemble des commutants de u).

1) Vérifier que $\mathscr{C}(u)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$ contenant $\mathbb{K}[u]$, algèbre des polynômes de u.

2) On suppose u diagonalisable : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_u(\lambda_i)$

où $E_u(\lambda_i) = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \operatorname{Id}_E)$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ étant les valeurs propres distinctes de u.

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_u(\lambda_i)$.

Montrer que $v \in \mathscr{L}(E)$ est un commutant de u si et seulement si $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} v$ est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & A_2 & \\ (0) & & \ddots \\ & & A_p \end{pmatrix} \quad \text{avec } A_i \in \mathscr{M}_{m_i}(\mathbb{K})$$

et $m_i = \dim E_u(\lambda_i)$.

En déduire $\dim \mathscr{C}(u)$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A.

Déterminer $\mathscr{C}(u)$.

Montrer que $\mathscr{C}(u) = \operatorname{Vect}\{\operatorname{Id}_E, u, u^2\}$.

4) Dans le cas général, hypothèses du 2), montrer que $\mathscr{C}(u) = \mathbb{K}[u]$ si et seulement si u n' a que des valeurs propres simples.

Ex. 14

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Résoudre l'équation $M^2 = A$ **(1)** avec $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Ex. 15

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$

tel que $A = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}} f$ où $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On posera $\mathbb{R}^3 = E$.

1) Trouver les droites de E stables par f.

2) Soit P un plan de E stable par f, montrer que soit $P = \operatorname{Ker}(f^2 + 2f)$ soit $P = \operatorname{Ker}(f + 2\operatorname{Id}_E)^2$.

En déduire les plans de E stables par f.

Copyrighted material

Hidden page

Solutions des exercices

Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on convient de nommer de la même façon une matrice et l'endomorphisme canoniquement associé. Cela permet de noter $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ ou $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ les sous-espaces propres de A.

Niveau 1

Ex. 1

Soit $(e_j)_{1\leqslant j\leqslant 2n-1}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n-1}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n-1})$ canoniquement associé à A.

On constate $\forall j \in [\![1, 2n-1]\!], f(e_j) = ae_j + be_{2n-j}$ d'où :

$$f(e_j + e_{2n-j}) = (a+b)(e_j + e_{2n-j}) \quad . \quad f(e_j - e_{2n-j}) = (a-b)(e_j - e_{2n-j})$$

Notons alors $c_j = \begin{cases} e_j + e_{2n-j} & \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant n \\ e_j - e_{2n-j} & \text{pour } n+1 \leqslant j \leqslant 2n-1 \end{cases}$

La matrice du système $(c_j)_{1\leqslant j\leqslant 2n-1}$ dans la base $(e_j)_{1\leqslant j\leqslant 2n-1}$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & & & -1 \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & 1 & & -1 & & \\ 0 & & & 2 & & & 0 \\ & & 1 & & 1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ 1 & & & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n-1}(\mathbb{R})$$

Donc $(c_j)_{1\leqslant j\leqslant 2n-1}$ est une base de $\mathbb{R}^{2n-1}$ formée de vecteurs propres de f : f et A sont diagonalisables. Si $b \neq 0$, f admet deux valeurs propres distinctes $(a+b)$ et $(a-b)$, les sous-espaces propres associés ayant pour bases respectives $(c_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et $(c_k)_{n+1\leqslant k\leqslant 2n-1}$.

Ex. 2

Des relations **(1)**, on tire $(\lambda+\mu)f^2 = \lambda^3 u + \mu^3 v + \lambda\mu(\lambda u + \mu v)$ c'est-à-dire $f^3 - (\lambda+\mu)f^2 + \lambda\mu f = 0$.

Ainsi $P(X) = X^3 - (\lambda+\mu)X^2 + \lambda\mu X = X(X-\lambda)(X-\mu)$ est polynôme annulateur de f.

- Si $0, \lambda, \mu$ sont distincts, P n'a que des racines simples et f est diagonalisable (cf. théorème **8**).
- Si $\lambda = \mu = 0$, $f = 0$ est diagonalisable.
- Si $\lambda = 0, \mu \neq 0$: $f = \mu v, f^2 = \mu^2 v$ donne $v^2 = v$, v est un projecteur donc est diagonalisable : $f = \mu v$ est diagonalisable.
- Si $\lambda \neq 0, \mu = 0$: $f = \lambda u$, le cas est identique au précédent (u est un projecteur).
- Si $\lambda = \mu \neq 0$: $f = \lambda(u+v), f^2 = \lambda^2(u+v)$ donne $(u+v)^2 = u+v$, ce cas est encore identique aux deux précédents ($u+v$ est un projecteur).

Ex. 3

Polynôme caractéristique : $\chi_A(X) = (3-X)(3+X)(1-X)(1+X)$. Avec quatre valeurs propres distinctes, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Chaque sous-espace propre est de dimension 1 : nous en donnons un système d'équations et un vecteur directeur.

$$\lambda = 1 \qquad \mathrm{Ker}(A - I) \begin{cases} -x + y &= 0 \\ 3x - y + 2z &= 0 \\ z - t &= 0 \end{cases} \qquad \text{vecteur directeur } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Copyrighted material

$\lambda = -1$ $\quad \mathrm{Ker}(A+I)\begin{cases} x+y & = 0 \\ 3x+y+2z & = 0 \\ z+t & = 0 \end{cases}$ vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$ $\quad \mathrm{Ker}(A-3I)\begin{cases} -3x+y & = 0 \\ 3x-3y+2z & = 0 \\ z-3t & = 0 \end{cases}$ vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -3$ $\quad \mathrm{Ker}(A+3I)\begin{cases} 3x+y & = 0 \\ 3x+3y+2z & = 0 \\ z+3t & = 0 \end{cases}$ vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Choix de P

- Si P diagonalise A : $P^{-1}AP = D$ (diagonale) alors ${}^tP\,{}^tA\,{}^tP^{-1} = D$ donc ${}^tP^{-1}$ diagonalise ${}^tA$. En conséquence, les lignes de P^{-1} sont vecteurs propres de ${}^tA$. Donc, si le choix proposé est possible, nécessairement les lignes de P sont les vecteurs propres de ${}^tA$. **(1)**
- Les valeurs propres de ${}^tA$ sont celles de A (car $\chi_{{}^tA} = \chi_A$). Sous-espaces propres de ${}^tA$:

$\lambda = 1$ $\quad \mathrm{Ker}({}^tA-I)\begin{cases} -x+3y & = 0 \\ x-y+2z & = 0 \\ 3z-t & = 0 \end{cases}$ vecteur directeur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$ $\quad \mathrm{Ker}({}^tA+I)\begin{cases} x+3y & = 0 \\ x+y+2z & = 0 \\ 3z+t & = 0 \end{cases}$ vecteur directeur $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$ $\quad \mathrm{Ker}({}^tA-3I)\begin{cases} -3x+3y & = 0 \\ x-3y+2z & = 0 \\ 3z-3t & = 0 \end{cases}$ vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -3$ $\quad \mathrm{Ker}({}^tA+3I)\begin{cases} 3x+3y & = 0 \\ x+3y+2z & = 0 \\ 3z+3t & = 0 \end{cases}$ vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Pour que la condition **(1)** soit réalisée, nous pouvons prendre : $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a alors $P_1^2 = 8I$, donc avec $P = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}P_1$, il vient $P^2 = I$

c'est-à-dire : $P^{-1} = P$ et $P^{-1}AP = PAP = \mathrm{diag}(3, 1, -1, -3)$.

Ex. 4

Qu'un endomorphisme soit ou ne soit pas diagonalisable, les droites stables sont toujours les droites dirigées par des vecteurs propres. Le calcul du polynôme caractéristique donne $\chi_A(X) = (2-X)\Big((1-X)^2+1\Big)$.

u admet une seule valeur propre : 2 ; celle-ci est simple, on a donc une seule droite stable par u, c'est la droite vectorielle $E_u(2)$ engendrée par $(1, 1, 1)$.

u n'est pas diagonalisable. Pour les plans stables, on peut utiliser l'exercice 9 de mise en œuvre : le plan H d'équation $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 = 0$ est stable par u si et seulement si $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0, 0, 0)$ est vecteur propre de ${}^tA$.

$\chi_{{}^tA} = \chi_A$: ${}^tA$ a une seule valeur propre : 2, le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}(y)$ avec $y = (0, 1, 1)$, d'où l'unique plan stable H d'équation $x_2 + x_3 = 0$.

Copyrighted material

Ex. 5

Première solution

Le polynôme caractéristique de M est $\chi_M(X) = -(X+1)(X-1)^2$.

L'équation $MU = U$ a pour solutions indépendantes $U_1 = (1,0,0)$ et $U_2 = (0,1,-2)$.

M est alors diagonalisable et semblable à la matrice diagonale $D = \text{diag}(-1,1,1)$ (sans avoir à résoudre $MU = -U$).

Avec $D^{2n} = I_3$ et $D^{2n+1} = D$, il vient $M^{2n} = I_3$ et $M^{2n+1} = M$.

Deuxième solution

On a $M^2 = I_3$ donc $X^2 - 1$ est polynôme annulateur de M. Alors $M^3 = M$. Il vient aisément $M^{2n} = I_3$ et $M^{2n+1} = M$.

Niveau 2

Ex. 6

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et $X = [x_i] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. Il existe alors une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $x_0 = x_{n+1} = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, x_{k-1} + (2-\lambda)x_k + x_{k+1} = 0$.

L'équation caractéristique associée à cette suite récurrente est $x^2 + (2-\lambda)x + 1 = 0$.

Notons u et v ses racines complexes : $u + v = \lambda - 2$, $u \cdot v = 1$.

Dans le cas où elles sont distinctes, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, x_k = \alpha u^k + \beta v^k$.

$x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$ donnent $\alpha + \beta = 0$, $\alpha u^{n+1} + \beta v^{n+1} = 0$ d'où $u^{n+1} = v^{n+1}$ puis $u^{2(n+1)} = 1$.

On en déduit $u = e^{\frac{pi\pi}{n+1}}$, $p \in [\![0, n]\!]$, donc $v = e^{\frac{-pi\pi}{n+1}}$ et, avec $\alpha = -\beta = \frac{x_1}{2i}$, il vient :

$$x_k = x_1 \sin\frac{kp\pi}{n+1} \quad , \quad \lambda = 2 + 2\cos\frac{p\pi}{n+1} = 4\cos^2\frac{p\pi}{2(n+1)}.$$

On vérifie alors que, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, le vecteur $X_p = \left[\sin\frac{kp\pi}{n+1}\right]_{1\leq k\leq n}$ est vecteur propre de A (il est non nul) associé à la valeur propre $\lambda_p = 4\cos^2\frac{p\pi}{2(n+1)}$ (utiliser $\sin(k-1)\theta + \sin(k+1)\theta = 2\cos\theta\sin k\theta$).

Admettant n valeurs propres distinctes $(\lambda_p \in]0,4[)$, A est diagonalisable et on peut écrire :

$$P^{-1} \cdot AP = \text{diag}\left[4\cos^2\frac{\pi}{2n+2}, \ldots, 4\cos^2\frac{j\pi}{2n+2}, \ldots, 4\cos^2\frac{n\pi}{2n+2}\right] \text{ avec } P = \left[\sin\frac{ij\pi}{n+1}\right].$$

Ex. 7

On suppose que $n \geqslant 2$. Il est utile ici de considérer la relation : $A \cdot B = B \cdot A = (\det A)I_n$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ : $AX = \lambda X$.

- Si $\lambda \neq 0$, $BAX = (\det A)X$ donne $BX = \dfrac{\det A}{\lambda}X$:

X est donc un vecteur propre de B associé à la valeur propre $\dfrac{\det A}{\lambda}$.

- Si $\lambda = 0$, alors $\det A = 0$ (car 0 est valeur propre de A) donc $AB = BA = 0$.
  - pour $\text{rg}\, A \leqslant n-2$, on a $B = 0$ et X est vecteur propre de B,
  - pour $\text{rg}\, A = n-1$, de $AB = BA = 0$ on déduit $\text{rg}\, B = 1$ et $\text{Ker}\, A = \text{Im}\, B$ (droite vectorielle). Dans ce cas, on a $X \in \text{Ker}\, A$ donc $X \in \text{Im}\, B$ et puisque $BX \in \text{Im}\, B$, il existe $\mu \in K$ tel que $BX = \mu X$: X est vecteur propre de B.

Remarque

1) De cette étude, il résulte que si A est diagonalisable, B l'est aussi.

2) On peut aussi en déduire le polynôme caractéristique de B (ou de $\text{com}\, A$).

- Si $\text{rg}\, A = n$, alors $B = (\det A)A^{-1}$ et, avec $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - X)$, il vient $\chi_B(X) = \prod_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\det A}{\lambda_i} - X\right)$.

Copyrighted material

- Si $\operatorname{rg} A = n-1$, $\chi_B(X) = (-X)^{n-1}(\operatorname{Tr} B - X)$ où $\operatorname{Tr} B$ est la somme des cofacteurs des éléments diagonaux de A.
- Si $\operatorname{rg} A \leqslant n-2$, $\chi_B(X) = (-X)^n$, $(B = 0)$.

Ex. 8

Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

De même, il existe $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}BQ = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2)$

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} \ , \ Q^{-1} = \begin{pmatrix} q'_1 & q'_2 \\ q'_3 & q'_4 \end{pmatrix} \ , \ Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

On en déduit $\begin{pmatrix} q'_1 I_n & q'_2 I_n \\ q'_3 I_n & q'_4 I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 A & b_2 A \\ b_3 A & b_4 A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 I_n & q_2 I_n \\ q_3 I_n & q_4 I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 A & 0 \\ 0 & \mu_2 A \end{pmatrix}$

avec $\begin{pmatrix} q'_1 I_n & q'_2 I_n \\ q'_3 I_n & q'_4 I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 I_n & q_2 I_n \\ q_3 I_n & q_4 I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$ donc C est semblable à $C' = \begin{pmatrix} \mu_1 A & 0 \\ 0 & \mu_2 A \end{pmatrix}$

On a d'autre part $\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 A & 0 \\ 0 & \mu_2 A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 D & 0 \\ 0 & \mu_2 D \end{pmatrix}$

avec $\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = I_{2n}$. Donc C' est semblable à $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 D & 0 \\ 0 & \mu_2 D \end{pmatrix}$ qui est diagonale.

Finalement C est diagonalisable : $R^{-1}CR = \begin{pmatrix} \mu_1 D & 0 \\ 0 & \mu_2 D \end{pmatrix}$ avec :

$$R = \begin{pmatrix} q_1 I_n & q_2 I_n \\ q_3 I_n & q_4 I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 P & q_2 P \\ q_3 P & q_4 P \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}).$$

Ex. 9

1) A ayant n valeurs propres distinctes, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

Posons $P^{-1}BP = C$ d'où $C^2 = P^{-1}B^2P = P^{-1}AP = D$.

Montrons alors que C est diagonale.

On constate que C et $D = C^2$ commutent : $CD = DC$.

L'égalité des termes (i,j) donne $\lambda_j C_{ij} = \lambda_i C_{ij}$, or pour $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda j$ donc $C_{ij} = 0$.

2) Le calcul donne $\chi_A(X) = -X(1-X)(16-X)$. Avec $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 16$ et les notations du 1), on a :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \operatorname{diag}(0,1,16)$$

Les matrices diagonales C vérifiant $C^2 = D$ sont $\operatorname{diag}(0, \varepsilon_1, 4\varepsilon_2)$ où $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

Les matrices cherchées sont alors $B = PCP^{-1}$. Le calcul donne :

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B \in \left\{ \pm \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \pm \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 5 & -5 \\ 5 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ex. 10

Étude d'un cas particulier

Supposons qu'il existe $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ base de E telle que $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U$.

Posons $F = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $G = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} g = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$, $A' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$

La condition $u \circ f = g \circ u$ s'écrit $UF = GU$ c'est-à-dire $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ C' & 0 \end{pmatrix}$ et équivaut donc à :

$$A = A', B = 0, C' = 0.$$

Copyrighted material

Ainsi :

$$F = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \quad . \quad \chi_F(X) = \det(F - XI_n) = \det(A - XI_r)\det(D - XI_{n-r})$$

$$G = \begin{pmatrix} A & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix} \quad . \quad \chi_G(X) = \det(G - XI_n) = \det(A - XI_r)\det(D' - XI_{n-r})$$

$\det(A - XI_r)$ est un polynôme de degré r de $\mathbb{C}[X]$, d'où la conclusion.

Cas général : $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base quelconque de E.

u étant de rang r, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, u = PUQ$ avec $U = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En posant toujours $F = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f$ et $G = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, g$, $u \circ f = g \circ u$ s'écrit $PUQF = GPUQ$ et équivaut donc à $UF_1 = G_1 U$ avec $F_1 = QFQ^{-1}$, $G_1 = P^{-1}GP$.

D'après l'étude du cas particulier, χ_{F_1} et χ_{G_1} ont un diviseur commun de degré au moins égal à r.

F_1 et G_1 étant respectivement semblables à F et G, on a $\chi_{F_1} = \chi_F$ et $\chi_{G_1} = \chi_G$, d'où la conclusion.

Ex. 11

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$ et soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que :

$$A = \mathrm{mat}_{(e_i)} f \quad \text{et} \quad X = \mathrm{mat}_{(e_i)}\, g$$

Ainsi l'équation matricielle **(1)** est équivalente à $g^2 = f$ **(2)**.

Le polynôme caractéristique de f est $\chi_f(\lambda) = \chi_f(A) = (1 - \lambda)^2(4 - \lambda)$ et ses sous-espaces propres :

$$\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Vect}(e_2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\left(f - 4\,\mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Vect}(e_3)$$

Cherchons des conditions nécessaires

Si $g \in \mathcal{L}(E)$ est solution de **(2)**, on a alors $g \circ f = f \circ g = f^3$: f et g sont permutables donc tout sous-espace propre de f est stable par g.

Ainsi $g(e_2) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, or $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ est la droite vectorielle $\mathbb{R}e_2$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_2) = \lambda e_2$: e_2 est également vecteur propre de g. De même, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_3) = \mu e_3$.

De plus, $g(e_2) = \lambda e_2$ donne $g^2(e_2) = \lambda^2 e_2$ donc $e_2 = \lambda^2 e_2$ et $\lambda = \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 \in \{-1, 1\}$,

de même $g^2(e_3) = \mu^2 e_3$ donc $4e_3 = \mu^2 e_3$ et $\mu = 2\varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$.

Ainsi on a nécessairement :

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \varepsilon_1 & 0 \\ \gamma & 0 & 2\varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \varepsilon_1 \in \{-1, 1\} \ , \ \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$$

Conditions suffisantes

Pour X de la forme ci-dessus, on a $X^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ \beta(\alpha + \varepsilon_1) & 1 & 0 \\ \gamma(\alpha + 2\varepsilon_2) & 0 & 4 \end{pmatrix}$ donc $X^2 = A$ s'écrit :

$$\begin{cases} \alpha^2 = 1 & \textbf{(3)} \\ \beta(\alpha + \varepsilon_1) = 1 & \textbf{(4)} \\ \gamma(\alpha + 2\varepsilon_2) = 1 & \textbf{(5)} \end{cases}$$

La condition **(3)** donne $\alpha = 1$ ou -1 c'est-à-dire $\alpha = \varepsilon_1$ ou $\alpha = -\varepsilon_1$. Or d'après **(4)**, $\alpha + \varepsilon_1 \neq 0$, le système **(3) (4) (5)** est donc équivalent à :

$$\alpha = \varepsilon_1 \quad . \quad \beta = \frac{\varepsilon_1}{2} \quad . \quad \gamma = \frac{1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

Conclusion

L'équation **(1)** a quatre solutions :

$$X = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad . \quad X = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad . \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

En posant $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a donc :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou en écrivant par blocs } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Application à l'équation

Le changement d'inconnue défini par $N = P^{-1}MP$ transforme l'équation **(1)** proposée en

(2) : $N^2 = \begin{pmatrix} 4I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a maintenant $N = \mathrm{mat}_{(u_i)}\, g$.

On observe que si g est solution du problème $f \circ g = g \circ f = f^3$, les sous-espaces propres de f sont donc stables par g et N est de la forme $\begin{pmatrix} N' & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $N' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Ainsi l'équation **(2)** équivaut à $N'^2 = 4I_2$, $\lambda^2 = 1$.

La condition $N'^2 = 4I_2$ caractérise que $\frac{1}{2}N'$ est une matrice de symétrie donc $N' = 2I_2$ ou $N' = -2I_2$ ou N' est semblable à $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Finalement, les solutions de **(1)** sont les matrices :

$$P\begin{pmatrix} 2I_2 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}P^{-1} \quad , \quad P\begin{pmatrix} -2I_2 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}P^{-1} \quad , \quad P\begin{pmatrix} 2Q^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}Q & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

où Q est quelconque dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

En termes d'endomorphismes, les solutions de $g^2 = f$ sont les endomorphismes g de E tels que :

- $F_1 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ est stable par g et l'endomorphismes $g_{F_1} \in \mathcal{L}(F_1)$ induit par g est tel qu'il existe s symétrie de F_1 avec $g = 2s$,
- $F_2 = \mathrm{Vect}(u_3)$ est stable par g et $g_{F_2} \in \mathcal{L}(F_2)$ induit par g est tel que $g = \pm \mathrm{Id}_{F_2}$.

Ex. 15

1) Une droite $D = \mathbb{R}u$ est stable par f si et seulement si u est vecteur propre de f.

Le calcul donne $\chi_A = \det(A - XI_3) = -X(X+2)^2$

$\mathrm{Ker}\, f = \mathbb{R}u_1$ avec $u_1 = (3,1,5) = 3e_1 + e_2 + 5e_3$

$\mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id}_E) = \mathbb{R}u_2$ avec $u_2 = (1,-1,1) = e_1 - e_2 + e_3$

On remarque que f n'est pas diagonalisable. Il existe exactement deux droites de E stables par f, ce sont $\mathbb{R}u_1$ et $\mathbb{R}u_2$.

2) Si P plan de E est stable par f, il existe $g \in \mathcal{L}(P)$ induit par f.

On sait alors que le polynôme caractéristique de g, χ_g divise $\chi_f = X(X+2)^2$ (propriété **(25)**).

D'autre part, $\deg \chi_g = \dim P = 2$, il y a donc deux possibilités :

a) $\chi_g = X(X+2)$

b) $\chi_g = (X+2)^2$

Dans le cas a), g admet deux valeurs propres simples 0 et -2 donc est diagonalisable, ce qui donne que P admet une base formée de vecteurs propres de g donc de f et on a alors :

$$P = \mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2 = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id}_E).$$

Dans le cas b), remarquons d'abord que le théorème de Cayley-Hamilton donne :

$$\chi_g(g) = 0$$

et donc $\forall x \in P$, $(f + 2\,\mathrm{Id}_E)^2 = 0$, soit encore :

$$P \subset \mathrm{Ker}\left((f + 2\,\mathrm{Id}_E)^2\right).$$

Copyrighted material

Formons donc $A+2I_3=\begin{pmatrix}0&1&1\\8&3&-5\\4&3&-1\end{pmatrix}$ puis $(A+2I_3)^2=\begin{pmatrix}12&6&-6\\4&2&-2\\20&10&-10\end{pmatrix}$.

Le système $\begin{cases}12x+6y-6z=0\\4x+2y-2z=0\\20x+10y-10z=0\end{cases}$ qui définit $\mathrm{Ker}\left((f+2\,\mathrm{Id}_E)^2\right)$ équivaut à $2x+y-z=0$.

On a donc $\dim \mathrm{Ker}\left((f+2\,\mathrm{Id}_E)^2\right)=2$, et dans le cas b), $P=\mathrm{Ker}\left((f+2\,\mathrm{Id}_E)^2\right)$.

Les deux plans précédents $P_1=\mathrm{Ker}\left(f\circ(f+2\,\mathrm{Id}_E)\right)$ et $P_2=\mathrm{Ker}\left((f+2\,\mathrm{Id}_E)^2\right)$ sont les seules possibilités de plans stables par f.

D'autre part, puisque les polynômes en f : $f\circ(f+2\,\mathrm{Id}_E)$ et $(f+2\,\mathrm{Id}_E)^2$ sont permutables avec f, ces deux plans sont effectivement stables par f.

Ainsi, il y a exactement deux plans de E : P_1 et P_2 stables par f.

Pour conclure, rappelons que $P_1=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ (on peut noter que f_{P_1} est diagonalisable) et le calcul de $(A+2I)^2$ a montré que P_2 a pour équation $2x_1+x_2-x_3=0$ donc que :

$$P_2=\mathrm{Vect}(u_2,u_3)\text{ avec }u_3=(0,1,1)=e_2+e_3.$$

Copyrighted material

CHAPITRE

5 *Espaces préhilbertiens*

A. Formes bilinéaires symétriques – Formes quadratiques 196
1. Formes bilinéaires 196
2. Formes quadratiques 199
3. Formes quadratiques sur un espace de dimension finie 203

B. Espaces préhilbertiens réels 205
1. Produit scalaire euclidien 205
2. Norme euclidienne 207

C. Espaces préhilbertiens complexes 208
1. Application semi-linéaires – Formes sesquilinéaires 208
2. Produit scalaire hermitien 209
3. Norme hermitienne 210

D. Orthogonalité 212
1. Définitions – Propriétés générales 212
2. Supplémentaire orthogonal 216
3. Projections et symétries orthogonales 220
4. Matrice d'un produit scalaire (dimension finie) 223

Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre 225

Énoncés des exercices 234

Solutions des exercices 237

Copyrighted material

A. Formes bilinéaires symétriques Formes quadratiques

Dans cette section, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et E^* son espace dual.

1. Formes bilinéaires ✎ (1)

✎ (1) La notion de d'application p-linéaire a été introduite en Algèbre et Géométrie, MPSI ou PCSI, chapitre 14.

Définition 1

On appelle **transposée d'une forme bilinéaire** φ sur E, la forme bilinéaire sur E, notée ${}^t\varphi$, définie par :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad {}^t\varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

Propriété 1

Une forme bilinéaire φ sur E est :

- symétrique si et seulement si ${}^t\varphi = \varphi$,
- antisymétrique si et seulement si ${}^t\varphi = -\varphi$.

Propriété 2

Les espaces vectoriels $\mathscr{L}_2(E)$, $\mathscr{S}_2(E)$, $\mathscr{A}_2(E)$.

a) L'ensemble $\mathscr{L}_2(E)$ des formes bilinéaires sur E est un sous-espace de $\mathscr{F}(E^2, \mathbb{R})$ ✎ (2)

b) L'application de $\mathscr{L}_2(E)$ dans lui-même, $\varphi \mapsto {}^t\varphi$ est un automorphisme involutif.

c) Les ensembles $\mathscr{S}_2(E)$ ✎ (3) et $\mathscr{A}_2(E)$ ✎ (4) sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathscr{L}_2(E)$. La décomposition de tout $\varphi \in \mathscr{L}_2(E)$ est donnée par :

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\varphi + {}^t\varphi\right) \in \mathscr{S}(E), \alpha = \frac{1}{2}\left(\varphi - {}^t\varphi\right) \in \mathscr{A}_2(E), \varphi = \sigma + \alpha$$

σ et α sont appelées partie symétrique et partie antisymétrique de φ.

✎ (2) À ne pas confondre avec $\mathscr{L}(E^2, \mathbb{R})$.

✎ (3) Formes bilinéaires symétriques.

✎ (4) Formes bilinéaires antisymétriques.

Propriété 3

Restriction d'une forme bilinéaire à un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace de E et $\varphi \in \mathscr{L}_2(E)$.

La restriction de φ à F^2 est une forme bilinéaire sur F ; elle est symétrique lorsque φ est symétrique, antisymétrique lorsque φ est antisymétrique.

Exemple 1 Avec $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Exemple 2 Avec $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$.

φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Exemple 3 Soit $\varphi \in \mathscr{L}_2(E)$, f et g deux endomorphismes de E.

L'application $E^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \varphi\big(f(x), g(x)\big)$ est une forme bilinéaire sur E.

Par exemple, $(x, y) \mapsto \varphi(x + y, x - y)$ est une forme bilinéaire antisymétrique.

Exemple 4 Soit θ_1 et θ_2 deux formes linéaires sur E. L'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \theta_1(x) \cdot \theta_2(y)$ est une forme bilinéaire.

Avec les notations de la propriété 2 c), on a :

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{2}\left[\theta_1(x)\ \theta_2(y) + \theta_2(x)\ \theta_1(y)\right] \quad \alpha(x, y) = \frac{1}{2}\left[\theta_1(x)\ \theta_2(y) - \theta_2(x)\ \theta_1(y)\right].$$

Copyrighted material

1.1 – Matrice d'une forme bilinéaire

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est supposé de dimension finie $n \geqslant 1$, et soit $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une base de E.

Aux vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, on associe leurs matrices :

$$X = [x_i] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } Y = [y_j] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ dans la base } \mathcal{B}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$ et $M = [\varphi(e_i, e_j)] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice ${}^tXMY$ est du type $(1,1)$; en l'identifiant à son unique terme, on constate que :

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = {}^tXMY.$$

Définition 2

$[\varphi(e_i, e_j)] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$; on la note $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} \varphi$.

Définition 3

La forme bilinéaire canoniquement associée à une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice, dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$, est $M = [m_{ij}]$:

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i y_j = {}^tXMY$$

Propriété 4

a) L'application $\mathcal{L}_2(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi \mapsto [\varphi(e_i, e_j)]$ est un isomorphisme. (5)

b) On en déduit $\dim \mathcal{L}_2(E) = n^2$.

c) On a $\{\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, {}^tXMY = 0\} \iff M = 0$.

(5) Il dépend de la base $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$.

Propriété 5

a) Soit $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$ et $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} \varphi$. Alors ${}^tM = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, {}^t\varphi$.

b) φ est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} \varphi$ est symétrique (resp. antisymétrique).

c) On en déduit $\dim \mathcal{S}_2(E) = \frac{1}{2}n(n+1)$, $\dim \mathcal{A}_2(E) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Propriété 6

Changement de base

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la matrice de passage, et $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$.

Alors, les matrices de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont liées par la relation :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} \varphi = {}^tP (\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} \varphi) P.$$

C'est-à-dire $$[\varphi(e'_i, e'_j)] = {}^tP [\varphi(e_i, e_j)] P.$$

1.2 – Matrices congruentes

Définition 4

Deux matrices M et M' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites **congruentes** s'il existe :

$$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } M' = {}^tPMP.$$

Propriété 7

La congruence est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Copyrighted material

Propriété 8

Deux matrices M et M' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont congruentes si et seulement si étant donné $\varphi \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n)$ définie par $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\,\varphi$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de $\mathbb{R}^n$, il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ telle que : $M' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}\,\varphi$.

Propriété 9

Deux matrices congruentes ont le même rang.

Exemple 5 On dispose sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trois relations d'équivalence distinctes avec les notions de matrices équivalentes, semblables et congruentes.

Voici dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des exemples qui distinguent ces relations.

a) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont équivalentes, non semblables, non congruentes.

b) Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables, non congruentes.

c) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont non semblables, congruentes.

On sait que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang (voir chapitre 4 de ce tome). D'autre part, si deux matrices sont semblables, elles ont même polynôme caractéristique. ✎ (6)

✎ (6) Voir le chapitre 5.

Remarquons enfin que, si deux matrices sont congruentes, l'une est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si l'autre est symétrique (resp. antisymétrique).

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a ici $\mathrm{rg}\,A = \mathrm{rg}\,B$ donc A et B sont équivalentes. Les polynômes caractéristiques sont $\chi_A = X(X-1)$ et $\chi_B = X^2$, A et B ne sont donc pas semblables.

A est symétrique et B ne l'est pas, A et B ne sont donc pas congruentes.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Les polynômes caractéristiques $\chi_A = X^2 - 1$ et $\chi_B = X^2 - 1$ sont scindés et n'admettent que des racines simples : A et B sont toutes deux semblables à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et, par transitivité, elles sont semblables.

A est symétrique et B ne l'est pas, A et B ne sont donc pas congruentes.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Les polynômes caractéristiques sont $\chi_A = X^2 - 2X$ et $\chi_B = X(X-1)$, A et B ne sont donc pas semblables.

Soit φ la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associée à A, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Pour $x = x_1e_1 + x_2e_2$, $y = y_1e_1 + y_2e_2$ on a :

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 \text{ donc } \varphi(x, y) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2).$$

Considérons alors le changement de base défini par :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_2 \end{cases} \text{ c'est-à-dire aussi } \begin{cases} x_1 = x_1' - x_2' \\ x_2 = x_2' \end{cases}$$

Dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$ on a $\varphi(x, y) = x_1'y_1'$ et $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}\,\varphi = B$ donc A et B sont congruentes.

La matrice de changement de base est $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc la base $\mathcal{B}'$ est :

$$(e_1', e_2') \text{ avec } e_1' = e_1,\ e_2' = -e_1 + e_2.$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

▪ Si les deux formes sont non nulles et non proportionnelles, les hyperplans $\operatorname{Ker}\theta_1$ et $\operatorname{Ker}\theta_2$ sont distincts. ✎ (11)

Il existe donc $y_1 \in \operatorname{Ker}\theta_1 \setminus \operatorname{Ker}\theta_2$ et $y_2 \in \operatorname{Ker}\theta_2 \setminus \operatorname{Ker}\theta_1$.

Soit alors $x \in N(q_2)$. Alors $\varphi_2(x, y_1) = 0$ donne $\frac{1}{2}\theta_1(x)\theta_2(y_1) = 0$ donc $\theta_1(x) = 0$ et $\varphi_2(x, y_2) = 0$ donne $\theta_2(x) = 0$. Ainsi $x \in \operatorname{Ker}\theta_1 \cap \operatorname{Ker}\theta_2$.

Donc $N(q_2) \subset \operatorname{Ker}\theta_1 \cap \operatorname{Ker}\theta_2$.

L'inclusion $\operatorname{Ker}\theta_1 \cap \operatorname{Ker}\theta_2 \subset N(q_2)$ est évidente, d'où $N(q_2) = \operatorname{Ker}\theta_1 \cap \operatorname{Ker}\theta_2$.

✎ (11) Voir chapitre 3 de ce tome.

2.2 – Formes quadratiques positives

Définition 8

Une forme quadratique q sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est dite :

▪ **positive** si $\forall x \in E, q(x) \geqslant 0$;

▪ **négative** si $\forall x \in E, q(x) \leqslant 0$.

Remarques

1) Dire que q est une forme quadratique positive peut se noter $q \geqslant 0$.

2) q est négative si et seulement si $-q$ est positive.

Propriété 13

Soit q une forme quadratique sur E.

q est définie-positive si et seulement si $\forall x \in E \setminus \{0\},\ q(x) > 0$.

☞ ▪ Si q est définie-positive, on a par définition $\forall x \in E,\ q(x) \geqslant 0$ et pour $x \neq 0_E$, $q(x) \neq 0$ donc $q(x) > 0$.

▪ En supposant $\forall x \in E \setminus \{0\},\ q(x) > 0$, on a $x \neq 0_E \Rightarrow q(x) \neq 0$, donc, en contraposant :

$$q(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E.$$

Propriété 14

Si q, forme quadratique sur E, est définie alors q ou $-q$ est définie-positive.

☞ S'il existe $(a, b) \in E^2$ tel que $q(a) \cdot q(b) < 0$, l'application :

$$T : [0, 1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto q\big[(1-t)a + tb\big]$$

vérifie $T(0) = q(a)$, $T(1) = q(b)$, $T(0) \cdot T(1) < 0$.

De plus, $T(t) = (1-t)^2 q(a) + 2(1-t)t\,\varphi(a, b) + t^2 q(b)$ ✎ (12) : T est une fonction polynôme. La continuité de T et la propriété des valeurs intermédiaires prouve l'existence de $t_0 \in]0, 1[$ tel que $T(t_0) = q\big[(1-t_0)a + t_0 b\big] = 0$.

Le vecteur $(1-t_0)a + t_0 b$ appartient à $C(q)$, il est donc nul (q définie).

De l'égalité $(1-t_0)a = -t_0 b$, on déduit $(1-t_0)^2 q(a) = t_0^2 q(b)$, ce qui est contradictoire avec $q(a) \cdot q(b) < 0$.

✎ (12) φ est la forme polaire de q.

Théorème 2

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire φ.

a) Si q est positive : $\forall (x, y) \in E^2,\ \big[\varphi(x, y)\big]^2 \leqslant q(x) \cdot q(y)$.

b) Si q est définie, on a : $\big[\varphi(x, y)\big]^2 = q(x) \cdot q(y) \Rightarrow (x, y)$ lié.

Copyrighted material

Hidden page

a) Si q est positive ou négative, on dispose de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Donc, si $x \in C(q)$, on a $q(x) = 0$ et pour tout $y \in E$, $|\varphi(x, y)|^2 \leqslant 0$, c'est-à-dire $\varphi(x, y) = 0$ ce qui prouve que $x \in N(q)$.

Ainsi on a $C(q) \subset N(q)$ et puisque l'inclusion $N(q) \subset C(q)$ est toujours vraie, il vient dans ce cas : $N(q) = C(q)$.

✎ (14) C'est-à-dire que q n'est ni positive ni négative.

b) Supposons que $N(q) = C(q)$ et qu'il existe $(a, b) \in E^2$ tel que $q(a) \cdot q(b) < 0$. ✎ (14)

En s'inspirant de la démonstration de la propriété 13, il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que le vecteur $c = (1 - t_0)a + t_0 b$ soit dans $C(q)$, donc c est dans le noyau de q.

Les relations $\begin{cases} \varphi(c, a) = (1 - t_0)q(a) + t_0\,\varphi(a, b) = 0 \\ \varphi(c, b) = (1 - t_0)\,\varphi(a, b) + t_0 q(b) = 0 \end{cases}$

sont contradictoires avec $q(a) \cdot q(b) < 0$, d'où la conclusion.

3. Formes quadratiques sur un espace de dimension finie

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est supposé de dimension finie $n \geqslant 1$.

Soit q une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire.

Une base $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ étant fixée, la matrice $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\,\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad m_{ij} = \varphi(e_i, e_j) = m_{ji}.$$

En posant pour tout x de E, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a :

$$q(x) = \varphi(x, x) = {}^t XMX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i x_j \text{ ou encore } q(x) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} m_{ij} x_i x_j.$$

Définition 9

La matrice d'une forme quadratique dans une base $\mathcal{B}$ est la matrice de sa forme polaire.

Avec les notations précédentes, on écrit : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, q = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\,\varphi = \left[\varphi(e_i, e_j)\right] \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Définition 10

La forme quadratique canoniquement associée à une matrice symétrique $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ est M.

Définition 11

Soit M une **matrice symétrique** réelle d'ordre n : $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et q_M la forme quadratique qui lui est canoniquement associé.

On dit que M est **positive** (resp. **définie-positive**) lorsque q_M est positive (resp. définie-positive).

Notation 1

L'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n, positives (resp. définies-positives), est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).

Remarques

1) Les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathcal{S}_2(E)$, $\mathcal{Q}(E)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont isomorphes.

Leur dimension commune est $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Copyrighted material

2) Étant donné $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par définition des matrices symétriques réelles positives ou définies-positives, on obtient :

$$M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXMX \geqslant 0$$

$$M \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R}) \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXMX > 0$$

3) Étant donné une famille de scalaires $\left(\alpha_{ij}\right)_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$, l'application :

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x = \left(x_1, \ldots, x_n\right) \mapsto \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, sa forme polaire est :

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \alpha_{ij} \left(x_i y_j + x_j y_i\right).$$

Sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est donnée par :

$$m_{ii} = \alpha_{ii} \quad et \quad m_{ij} = \frac{1}{2}\alpha_{ij} \quad \text{pour } i \neq j.$$

On dit aussi que Φ est un **polynôme quadratique** sur $\mathbb{R}^n$.

La forme polaire associée s'obtient par la règle dite de **dédoublement des variables** :

$$x_i^2 \longrightarrow x_i y_i \quad (i \neq j), x_i x_j \longrightarrow \frac{1}{2}\left(x_i y_j + x_j y_i\right).$$

4) Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la matrice de passage, et $q \in \mathcal{Q}(E)$.

Avec $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, q$ et $M' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}\, q$, on a :

$$M' = {}^tPMP \quad \text{et} \quad \det M' = (\det P)^2 \cdot \det M.$$

Les matrices symétriques M et M' sont congruentes, donc de même rang.

Définition 12

Rang d'une forme quadratique

Soit q une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire.

On appelle rang de q (ou rang de φ) le rang de $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, q = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, \varphi$.

Il ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$, on le note $\mathrm{rg}\, q$ (ou $\mathrm{rg}\, \varphi$).

Définition 13

On appelle **discriminant** de $q \in \mathcal{Q}(E)$ dans une base $\mathcal{B}$, le scalaire :

$$\Delta_{\mathcal{B}}(q) = \det(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, q)$$

Avec les notations de la remarque 3) précédente, on a : $\Delta_{\mathcal{B}'}(q) = (\det P)^2 \cdot \Delta_{\mathcal{B}}(q)$.

Définition 14

Une forme quadratique $q \in \mathcal{Q}(E)$ est dite **non dégénérée** lorsque $\mathrm{rg}\, q = \dim E$.

Sinon, c'est-à-dire lorsque $\mathrm{rg}\, q < \dim E$, elle est dite **dégénérée**.

Exemple 11 Matrice sur la base canonique $\mathcal{B}$ et rang des formes quadratiques définies sur $\mathbb{R}^4$ par :

$$q_1(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_4\,.$$

$$q_2(x) = x_1x_2 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4\,.$$

On applique la remarque 3) suivant la définition 11.

La diagonale est formée des coefficients des termes carrés x_1^2, x_2^2, ... et en dehors de la diagonale, on met les coefficients des x_ix_j $(i \neq j)$ divisés par 2.

$$A_1 = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le calcul donne facilement $\det A_1 = 12$ donc $\mathrm{rg}\, q_1 = 4$.

Copyrighted material

$$A_2 = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, q_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes C_1 et C_3 sont colinéaires ainsi que les colonnes C_2 et C_4 d'où :

$$\mathrm{rg}\, q = \mathrm{rg}\, A_2 = \mathrm{rg}\,(C_1, C_2) = 2.$$

Exemple 12 Soit q une forme quadratique sur E, de rang r. En calculant la dimension du noyau $N(q)$, on peut vérifier que q est non dégénérée si et seulement si $N(q) = \{0_E\}$. ✎ (15)

✎ (15) Voir l'exemple 8 pour la définition de $N(q)$.

Soit φ la forme polaire de q et, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ étant une base de E, posons :

$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, \varphi = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, q.$$

On a $N(q) = \left\{ x \in E \,/\, \forall\, y \in E,\ \varphi(x, y) = 0 \right\}$.

Posons $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(y)$, il vient alors :

$$x \in N(q) \iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tYAX = 0 \text{ donc } x \in N(q) \iff AX = 0.$$

Il en résulte $\dim N(q) = n - r$.

Alors q est non dégénérée si et seulement si $r = n$, donc si et seulement si $N(q) = \{0_E\}$.

B. Espaces préhilbertiens réels

E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Produit scalaire euclidien

Définition 15

Un **produit scalaire euclidien** sur E est une forme bilinéaire symétrique φ sur E^2 dont la forme quadratique associée, $q : x \mapsto \varphi(x, x)$, est définie-positive.

Conséquence

Étant donné φ, application de E^2 dans $(\mathbb{R})$, les propositions suivantes sont équivalentes.

(I) φ est un produit scalaire sur E.

(II)
- (1) φ est bilinéaire
- (2) φ est symétrique
- (3) $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) \geqslant 0$
- (4) $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

(III)
- (1) φ est bilinéaire
- (2) φ est symétrique
- (5) $\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \varphi(x, x) > 0$

Notation 2

Les notations utilisées usuellement pour représenter un produit scalaire euclidien sont :

$$(x \mid y), \quad x \cdot y \quad \text{ou aussi} \quad \langle x \mid y \rangle.$$

Règles de calcul

Les x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, et y_j, $1 \leqslant j \leqslant p$, sont des vecteurs, les λ_i et μ_j des réels. On obtient : ✎ (16)

✎ (16) En tenant compte de la bilinéarité et de la symétrie du produit scalaire.

Copyrighted material

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{p} \mu_j y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_i \mu_j \langle x_i \mid y_j \rangle$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \langle x_i \mid x_i \rangle + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \lambda_i \lambda_j \langle x_i \mid x_j \rangle$$

Exemples usuels

1) $E = \mathbb{R}^n, \varphi : E^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ où $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$.

φ est un produit scalaire euclidien sur E dit **produit scalaire euclidien canonique.** ✎ (17)

✎ (17) C'est le produit scalaire de la géométrie usuelle.

2) $E = \mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{R}), (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b, k \geqslant 0$.

$\varphi : E^2 \to \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \int_a^b fg$: φ est un produit scalaire euclidien sur E.

La vérification des axiomes **(1)** et **(2)** est évidente. ✎ (18) Celle de l'axiome **(5)** résulte d'une propriété connue de l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment $[a, b]$ $(a < b)$.

✎ (18) Linéarité de l'intégrale.

Définition 16

Un **espace préhilbertien réel** est un :

$\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire euclidien φ.

Un tel espace sera noté (E, φ) ou E s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Théorème 4

Sous espaces-préhilbertiens réels

Soit (E, φ) un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E.

La restriction $\varphi_{|F^2}$ de φ à F^2 est un produit scalaire euclidien sur F, il est encore noté φ.

Exemple 13 Soit E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n^2$ soit convergente.

a) E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Il s'agit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

E est non vide car il contient la suite nulle et il est clair que, pour tout $u \in E$ et tout réel λ, $\lambda u \in E$. En remarquant que, pour tous réels a et b, on a $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_n + v_n)^2 \leqslant 2(u_n^2 + v_n^2).$$

Si $u \in E$ et $v \in E$, alors les séries de termes généraux u_n^2 et v_n^2 sont convergentes et il en est de même pour la série de terme général $2(u_n^2 + v_n^2)$, donc le critère de domination des séries à termes positifs donne la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n)^2$; ainsi $u + v \in E$.

b) $\varphi : E \to \mathbb{R}, (u, v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire euclidien.

Il faut d'abord prouver la convergence de $\sum_{n \geqslant 0} u_n v_n$ avec u et v dans E.

Pour tous réels a et b, on a $|ab| \leqslant a^2 + b^2$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n| \leqslant u_n^2 + v_n^2$.

Si $u \in E$ et $v \in E$, le critère de domination des séries à termes positifs donne la convergence de $\sum_{n \geqslant 0} |u_n v_n|$. La convergence de $\sum_{n \geqslant 0} u_n v_n$ en résulte.

On vérifie sans difficulté que φ satisfait aux axiomes de définition du produit scalaire :

φ est bilinéaire, symétrique et, si $u \in E \setminus \{0\}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \neq 0$ et alors :

$$\varphi(u, u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \geqslant u_{n_0}^2 > 0.$$

Copyrighted material

Hidden page

Formulaire 5

Pour tous vecteurs x et y de E :

(1) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$.

(2) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$.

(3) $\langle x \mid y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$.

(4) $\langle x \mid y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.

- Les formules **(1)** et **(2)** s'obtiennent en développant les carrés scalaires $\langle x+y \mid x+y\rangle$ et $\langle x-y \mid x-y\rangle$, les formules **(3)** et **(4)** se déduisent de **(1)** et **(2)**. [20]
- Les formules **(3)** et **(4)** qui expriment le produit scalaire en fonction de la norme sont les **identités de polarisation**.

[20] Il s'agit en fait des formulaires **1** et **2** appliqués avec $\varphi(x,y) = \langle x \mid y\rangle$ et $\|x\|^2 = \langle x \mid x\rangle$.

C. Espaces préhilbertiens complexes

1. Applications semi-linéaires – Formes sesquilinéaires

Définition 17

Soit E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, une application **semi-linéaire** de E dans F est un morphisme additif vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C},\ f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x).$$

Une **forme semi-linéaire** sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est une application semi-linéaire de E dans $\mathbb{C}$.

Définition 18

Soit E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, on appelle **forme sesquilinéaire** sur $E \times F$ toute application φ de $E \times F$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant les conditions :

(1) $\forall y \in F, \varphi(\cdot, y)\ :\ x \mapsto \varphi(x,y)$ est une forme semi-linéaire sur E.

(2) $\forall x \in E, \varphi(x, \cdot)\ :\ y \mapsto \varphi(x,y)$ est une forme linéaire sur F.

Les conditions **(1)** et **(2)** se traduisent par les identités :

(1) $\forall (x,x',y) \in E^3,\ \varphi(x+x',y) = \varphi(x,y) + \varphi(x',y)$;
$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C},\ \varphi(\lambda x, y) = \overline{\lambda}\,\varphi(x,y)$.

(2) $\forall (x,y,y') \in E^3,\ \varphi(x,y+y') = \varphi(x,y) + \varphi(x,y')$;
$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C},\ \varphi(x,\lambda y) = \lambda\,\varphi(x,y)$.

Définition 19

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, une **forme sesquilinéaire** φ sur E^2 est dite **hermitienne** lorsque **(3)** $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$. [21]

[21] Cette propriété **(3)** est également appelée **symétrie hermitienne**.

Remarque

Soit $\varphi : E^2 \to \mathbb{C}$ une application possédant la symétrie hermitienne **(3)** alors φ vérifie **(1)** si et seulement si φ vérifie **(2)**. En effet :

$$\varphi(\lambda x + x', y) = \overline{\lambda}\,\varphi(x,y) + \varphi(x',y) \iff \overline{\varphi(\lambda x + x', y)} = \lambda\overline{\varphi(x,y)} + \overline{\varphi(x',y)}$$

donc $\varphi(\lambda x + x', y) = \overline{\lambda}\,\varphi(x,y) + \varphi(x',y) \iff \varphi(y, \lambda x + x') = \lambda\,\varphi(y,x) + \varphi(y,x')$.

φ est donc une forme sesquilinéaire hermitienne si et seulement si elle vérifie **(1)** et **(3)** ou **(2)** et **(3)**.

Copyrighted material

2. Produit scalaire hermitien

E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Théorème 8

Soit φ une forme sesquilinéaire hermitienne sur E^2.

a) Pour tout x de E, $\varphi(x,x)$ est réel.

b) Les propositions **(1)** et **(2)** suivantes sont équivalentes :

$$\textbf{(1)}\quad \begin{cases} \forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geqslant 0 & \text{(1.a)} \\ \forall x \in E,\ \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E & \text{(1.b)} \end{cases}$$

$$\textbf{(2)}\quad \forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \varphi(x,x) > 0.$$

☞ a) Par symétrie hermitienne, $\forall x \in E, \varphi(x,x) = \overline{\varphi(x,x)}$, donc $\varphi(x,x)$ est réel.

b) φ étant sesquilinéaire, on a pour tout $x \in E$, $\varphi(x,0_E) = 0$, $\varphi(0_E,x) = 0$ et donc :

$$\varphi(0_E,0_E) = 0.$$

En supposant **(1)**, on obtient que pour tout $x \neq 0_E$, $\varphi(x,x) \neq 0$ ✎ (22) et $\varphi(x,x) \geqslant 0$ donc :

$$\varphi(x,x) > 0.$$

En supposant **(2)**, sachant que $\varphi(0_E,0_E) = 0$, on obtient $\forall x \in E, \varphi(x,x) = 0$ et :

$$x \neq 0_E \Rightarrow \varphi(x,x) \neq 0 \text{ d'où } \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E.$$ ✎ (23)

✎ (22) Par contraposée de 1.b.

✎ (23) Par contraposée.

Définition 20

Un **produit scalaire hermitien** sur E est une application φ de E^2 dans $\mathbb{C}$ vérifiant l'un des deux groupes d'axiomes équivalents suivants :

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \textbf{(1)} & \varphi \text{ est sesquilinéaire} \\ \textbf{(2)} & \varphi \text{ est hermitienne} \\ \textbf{(3)} & \forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geqslant 0 \\ \textbf{(4)} & \forall x \in E,\ \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E \end{cases} \qquad \text{(II)}\quad \begin{cases} \textbf{(1)} & \varphi \text{ est sesquilinéaire} \\ \textbf{(2)} & \varphi \text{ est hermitienne} \\ \textbf{(3)} & \forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \varphi(x,x) > 0 \end{cases}$$

Remarques

1) φ vérifiant **(3)** est dite **positive**.
φ vérifiant **(4)** est dite **définie**.
φ vérifiant **(3)** et **(4)** est dite **définie-positive**.

2) On retiendra qu'un produit scalaire hermitien est :
- **semi-linéaire** par rapport à la **première** variable
- **linéaire** par rapport à la **deuxième** variable

Notation 4

Les notations utilisées usuellement pour représenter un produit scalaire hermitien sont les mêmes que pour le produit scalaire euclidien.

Règles de calcul

Les x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, et y_j, $1 \leqslant j \leqslant p$, sont des vecteurs, les λ_i et μ_j des complexes.

En tenant compte de la sesquilinéarité et de la symétrie hermitienne du produit scalaire hermitien, on obtient :

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{p} \mu_j y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \overline{\lambda_i}\, \mu_j \langle x_i \mid y_j \rangle$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \langle x_i \mid x_i \rangle + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \overline{\lambda_i}\, \lambda_j \langle x_i \mid x_j \rangle + \overline{\lambda_j}\, \lambda_i \langle x_j \mid x_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \langle x_i \mid x_i \rangle + 2\,\mathrm{Re} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \overline{\lambda_i}\, \lambda_j \langle x_i \mid x_j \rangle$$

Copyrighted material

Exemples usuels

1) $E = \mathbb{C}^n, \varphi : E^2 \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$ où $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$.

φ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^n$ dit **produit scalaire hermitien canonique**.

2) $E = \mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{C}), (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b, k \geqslant 0$.

$\varphi : E^2 \to \mathbb{C}, \ (f, g) \mapsto \int_a^b \overline{f} g$: φ est un produit scalaire hermitien sur E.

3) Soit l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

$$\varphi : E^2 \to \mathbb{C}, \ (f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f} g$$

φ est un produit scalaire hermitien sur E. [24]

[24] On retrouve ce produit scalaire dans l'étude des séries de Fourier.

Comme dans l'exemple précédent, φ est clairement une forme sesquilinéaire hermitienne positive et $\varphi(f, f) = 0$ donne $f_{|[0,2\pi]} = 0$.

Il reste à observer que f étant 2π-périodique, $f_{|[0,2\pi]} = 0$ donne $f = 0$.

Définition 21

Un espace **préhilbertien complexe** est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire hermitien φ.

Un tel espace sera noté (E, φ), ou E s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Théorème 9

Sous-espaces préhilbertiens complexes

Soit (E, φ) un espace préhilbertien complexe et F un sous-espace vectoriel de E. La restriction $\varphi_{|F^2}$ de φ à F^2 est un produit scalaire hermitien sur E, il est encore noté φ.

Exemple 14 L'ensemble E des suites complexes $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n^2$ soit absolument convergente est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

$\varphi : E^2 \to \mathbb{C}, (u, v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$ est un produit scalaire hermitien sur E.

Même solution que pour l'exemple 13, en notant que :

$$|u_n + v_n|^2 \leqslant 2\left(|u_n|^2 + |v_n|^2\right) \quad \text{et} \quad |\overline{u_n}\, v_n| \leqslant |u_n|^2 + |v_n|^2.$$

3. Norme hermitienne

E est un espace préhilbertien complexe, le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $\langle x \mid y \rangle$.

Notation 5

Pour tout x de E, $\langle x \mid x \rangle$ est un réel positif, on note $\| x \| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.

Conséquences

1) $\forall x \in E \setminus \{0\}, \| x \| > 0$. 2) $\forall x \in E, \| x \| \geqslant 0$. 3) $\forall x \in E, \| x \| = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Théorème 10

Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

a) $\forall (x, y) \in E^2, |\langle x \mid y \rangle| \leqslant \| x \| \| y \|$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

b) $\forall (x, y) \in E^2, \| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$ (Inégalité triangulaire ou de Minkowski).

Copyrighted material

☞ Soit x et y fixés dans E.

a) $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \|\lambda x + y\|^2 = \langle \lambda x + y \mid \lambda x + y \rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2$ **(1)**

Posons $|\langle x \mid y \rangle| = r$ et $\langle x \mid y \rangle = re^{i\theta}$, on déduit de **(1)** que, pour tout t réel :

$$\|te^{i\theta}x + y\|^2 = t^2\|x\|^2 + 2rt + \|y\|^2.$$

- Si $x \neq 0_E$, $t \mapsto \|te^{i\theta}x + y\|^2$ est une fonction polynôme réelle du second degré à valeurs positives : ✎ (25)

$$r^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad |\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

- Si $x = 0_E$, alors $\langle x \mid y \rangle = 0$ et l'inégalité a) est encore vraie.

b) En utilisant $\mathrm{Re}\,\langle x \mid y \rangle \leqslant |\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$, on obtient :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$$

✎ (25) Son discriminant est donc négatif ou nul.

Théorème 11

Cas d'égalité de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

a) $|\langle x \mid y \rangle| = \|x\|\,\|y\|$ équivaut à (x, y) est lié.

b) $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ équivaut à (x, y) est positivement lié.

☞ a) Supposons $|\langle x \mid y \rangle| = \|x\|\,\|y\|$.

- Si $\|x\| = 0$, on a $x = 0_E$ et (x, y) est lié.
- Si $\|x\| \neq 0$, il existe $t \in \mathbb{R}$ racine double de $t^2\|x\|^2 + 2rt + \|y\|^2 = 0$ ✎ (26)

donc tel que $\|te^{i\theta}x + y\|^2 = 0$, ce qui exige $te^{i\theta}x + y = 0_E$, donc (x, y) est lié. ✎ (27)

b) Supposons $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.

- Si $x = 0_E$, (x, y) est positivement lié ($x = 0 \cdot y$).
- Si $x \neq 0_E$, $\|x + y\|^2 = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$ donne $\mathrm{Re}\,\langle x \mid y \rangle = \|x\|\,\|y\|$ et, puisque $\mathrm{Re}\,\langle x \mid y \rangle \leqslant |\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$, on en déduit :

$$\mathrm{Re}\,\langle x \mid y \rangle = |\langle x \mid y \rangle| = \|x\|\,\|y\|.$$

D'après a), $|\langle x \mid y \rangle| = \|x\|\,\|y\|$ donne l'existence de $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $y = \lambda x$ donc :

$$\langle x \mid y \rangle = \lambda\|x\|^2.$$

D'autre part, $\mathrm{Re}\,\langle x \mid y \rangle = |\langle x \mid y \rangle|$ donne que $\langle x \mid y \rangle$ est réel positif, donc λ est réel positif et (x, y) est positivement lié. La réciproque est évidente.

✎ (26) Cette équation a un discriminant nul.

✎ (27) La réciproque est évidente.

Théorème 12

Norme hermitienne

L'application $E \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ est une norme sur E.

☞ On vérifie les axiomes de définition des normes.

$\|x\| = 0$ donne $x = 0_E$.

$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x \mid \lambda x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x \mid x \rangle} = |\lambda|\,\|x\|,\ \lambda \in \mathbb{C}$.

$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (Inégalité de Minkowski).

Formulaire 6

Pour tout x de E, on a $\|x\| = \sup_{y \in B} |\langle x \mid y \rangle|$ où B désigne la boule unité fermée de E :

$$B = \{y \in E \,/\, \|y\| \leqslant 1\}.$$

☞ La démonstration est identique à celle du formulaire 4.

Copyrighted material

Formulaire

Pour tous vecteurs x et y de E :

(1) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x \mid y\rangle + \langle y \mid x\rangle + \|y\|^2$.

(2) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \langle x \mid y\rangle - \langle y \mid x\rangle + \|y\|^2$.

(3) $\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + i\langle x \mid y\rangle - i\langle y \mid x\rangle + \|y\|^2$.

(4) $\|x-iy\|^2 = \|x\|^2 - i\langle x \mid y\rangle + i\langle y \mid x\rangle + \|y\|^2$.

(5) $\langle x \mid y\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2\right)$.

La formule **(5)** est appelée **identité de polarisation**, elle permet de retrouver le produit scalaire en fonction de la norme.

D. Orthogonalité

(28) $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel ou complexe. (28)

1. Définitions – Propriétés générales

Définition 22

Deux vecteurs x et y sont dits **orthogonaux** si $\langle x \mid y\rangle = 0$.

(29) Euclidien ou hermitien.

On remarquera que, quel que soit le cas, (29) $\langle x \mid y\rangle = 0$ équivaut à $\langle y \mid x\rangle = 0$.
La relation ainsi définie est donc symétrique.

Définition 23

Deux parties A et B de E sont dites **orthogonales** si $\forall (x,y) \in A \times B, \langle x \mid y\rangle = 0$.

Définition 24

L'**orthogonal d'une partie** $A \neq \emptyset$ de E est l'ensemble $A^\perp = \{x \in E \ / \ \forall y \in A, \langle x \mid y\rangle = 0\}$.
Si $A = \emptyset$, on pose $A^\perp = E$.
Le double orthogonal $(A^\perp)^\perp$ est noté $A^{\perp\perp}$.

En particulier, $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.

Définition 25

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de E est dite :

- **orthogonale** si $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow \langle u_i \mid u_j\rangle = 0$,
- **orthonormale** (30) si $\forall (i,j) \in I^2, \langle u_i \mid u_j\rangle = \delta_{ij}$.

Si $(u_i)_{i\in I}$ est une base, on parle de base orthogonale ou orthonormale.

(30) Ou **orthonormée**.

Propriété 15

Orthogonal d'une partie de E

A et B désignent des parties de E.

a) $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.

c) $A^\perp = (\text{Vect } A)^\perp$.

d) $A \subset A^{\perp\perp}$.

Copyrighted material

Hidden page

$$\sum_{j=1}^{p} x_j = 0_E \text{ donne } 0 = \left\langle x_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{p} x_j \right\rangle = \|x_i\|^2 \text{ donc } x_i = 0_E.$$

Autre preuve

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ on a $\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq i}} F_j \subset F_i^{\perp}$ donc $F_i \cap \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq i}} F_j = \{0_E\}$.

Définition 27

Soit $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux.

Si la somme directe $\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i$ est égale à E, on dit que $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille de sous-espaces **supplémentaires orthogonaux**.

Exemple 15

On reprend $E = \left\{ (u_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty \right\}$, [34] $\forall (u, v) \in E^2$, $u = (u_n)_{\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{\mathbb{N}}$, $\langle u \mid v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Alors, pour le sous-espace F de E formé des suites presque nulles, on a :

$$F \oplus F^{\perp} \neq E \text{ et } F^{\perp\perp} \neq F.$$

[34] Espace préhilbertien réel défini dans l'exemple 13.

L'ensemble F des suites presque nulles est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. [35] et si u est presque nulle, la série de terme général u_n^2 converge, donc F est un sous-espace vectoriel de E.

Par ailleurs, une base de F est $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où les H_n sont les suites définies par $H_n = (\delta_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ (avec $\delta_{n,k} = 0$ si $k \neq n$ et $\delta_{n,n} = 1$: symbole de Kronecker).

Soit $u \in E$, d'après la propriété 15 :

$$u \in F^{\perp} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \langle u \mid H_n \rangle = 0$$

$$\text{donc} \quad u \in F^{\perp} \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$$

Ainsi, on a $F^{\perp} = \{0_E\}$ et $F \oplus F^{\perp} = F$.

F est différent de E puisque, par exemple, la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est élément de E mais n'appartient pas à F.

Enfin, $F^{\perp} = \{0_E\}$ donne $F^{\perp\perp} = E$ et donc $F \neq F^{\perp\perp}$.

[35] $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite presque nulle lorsqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $n > n_0 \Rightarrow u_n = 0$.

Propriété 19

Sous-espaces supplémentaires orthogonaux

Si F et G sont deux sous-espaces supplémentaires : $E = F \oplus G$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) F et G sont orthogonaux, **(2)** $G = F^{\perp}$, **(3)** $F = G^{\perp}$.

☞ ▪ Les parties F et G sont orthogonales si et seulement si : [36]

$$\forall x \in F, \ \forall y \in G, \ \langle x \mid y \rangle = 0$$

et cette proposition est équivalente à [37] $G \subset F^{\perp}$ et à $F \subset G^{\perp}$.

▪ Les implications **(2)** $\Rightarrow$ **(1)** et **(3)** $\Rightarrow$ **(1)** sont évidentes.

▪ Montrons que **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**.

On suppose donc que F et G sont deux sous-espaces tels que $E = F \oplus G$ et $G \subset F^{\perp}$, il s'agit de montrer que $F^{\perp} \subset G$.

Étant donné $x \in F^{\perp}$, puisque $E = F \oplus G$, il existe $x' \in F$ et $x'' \in G$ tels que $x = x' + x''$. Alors on a $\langle x \mid x' \rangle = 0$ et, puisque $G \subset F^{\perp}$, $\langle x' \mid x'' \rangle = 0$, donc $\| x' \|^2 = \langle x \mid x' \rangle - \langle x'' \mid x' \rangle = 0$, puis $x' = 0_E$; en conséquence, $x = x'' \in G$, ce qui montre $F^{\perp} \subset G$.

On a de même **(1)** $\Rightarrow$ **(3)**, (en fait F et G jouant des rôles symétriques dans **(1)**, les implications **(1)** $\Rightarrow$ **(2)** et **(1)** $\Rightarrow$ **(3)** sont identiques.

[36] Définition 23.

[37] Propriété 16.

Copyrighted material

Propriété 20

Si F est un sous-espace de E tel que $E = F \oplus F^\perp$, on a alors $F = F^{\perp\perp}$.

☞ C'est un corollaire de la propriété 19. En effet, $G = F^\perp$ donne $F = G^\perp = F^{\perp\perp}$.

Propriété 21

Si $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille finie de sous-espaces supplémentaires orthogonaux, on a :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq i}} F_j = F_i^\perp.$$

☞ C'est un corollaire de la propriété 19.

En effet, avec $G = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq i}} F_j$, on a $G \subset F_i^\perp$ et $E = G \oplus F_i$ donc $G = F_i^\perp$.

Propriété 22

Familles orthogonales

a) Toute famille orthogonale $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs non nuls est libre.

b) Si $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille orthogonale, alors $\left\| \sum_{i=1}^{p} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \| u_i \|^2$.

☞ a) Il suffit de prouver que toute famille finie $(u_{i_k})_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est libre. Soit donc $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_k u_{i_k} = 0_E$. En multipliant scalairement par $u_{i_{k_0}}$, on obtient [38] $0 = \left\langle u_{i_{k_0}} \middle| \sum_{i=1}^{p} \lambda_k u_{i_k} \right\rangle = \lambda_{k_0} \left\| u_{i_{k_0}} \right\|^2$ donc $\lambda_{k_0} = 0$ car $u_{i_{k_0}} \neq 0_E$.

On a ainsi prouvé que les λ_k sont tous nuls et donc que $(u_{i_k})_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est libre.

b) Il suffit de développer $\left\langle \sum_{i=1}^{p} u_i \middle| \sum_{j=1}^{p} u_j \right\rangle$: c'est le **théorème de Pythagore**.

[38] Quel que soit le cas de figure : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Cas particulier

Théorème 13

Soit E un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$.

x et y sont orthogonaux si et seulement si $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$.

☞ En effet, on a alors $\| x + y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2 = 2\langle x \mid y \rangle$.

Remarque

Ce résultat est faux dans un espace préhilbertien complexe car on a alors :

$$\| x + y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2 = 2 \operatorname{Re} \langle x \mid y \rangle.$$

Par exemple, dans $\mathbb{C}^2$ hermitien canonique, soit : $x = (i, 1)$. $y = (1, -i)$.

On a alors $\langle x \mid y \rangle = -i - i = -2i \neq 0$, x et y ne sont pas orthogonaux.

Cependant, $\| x \|^2 = 2$. $\| y \|^2 = 2$ et $x + y = (1 + i, 1 - i)$, donc :

$$\| x + y \|^2 = 4 = \| x \|^2 + \| y \|^2.$$

Copyrighted material

Hidden page

2.2 – Cas où F est de dimension finie

E est maintenant supposé de dimension quelconque.

Théorème 17

Orthogonal d'un vecteur non nul

Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$, alors $(a)^\perp = (\mathbb{K}a)^\perp$ est un hyperplan supplémentaire orthognal de la droite vectorielle $\mathbb{K}a$: $E = \mathbb{K}a \oplus (\mathbb{K}a)^\perp$.

☞ $(\mathbb{K}a)^\perp$ est le noyau de la forme linéaire $f : E \to \mathbb{K}, x \mapsto \langle a \mid x \rangle$. Cette forme linéaire est non nulle car $f(a) = \|a\|^2 \neq 0$ donc $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan de E. Tout x de E s'écrit :

$$x = \frac{\langle a \mid x \rangle}{\|a\|^2} a + \left(x - \frac{\langle a \mid x \rangle}{\|a\|^2} a \right)$$

avec $\frac{\langle a \mid x \rangle}{\|a\|^2} a \in \mathbb{K}a$ et $x - \frac{\langle a \mid x \rangle}{\|a\|^2} a \in (\mathbb{K}a)^\perp$ d'où $E = \mathbb{K}a \oplus (\mathbb{K}a)^\perp$.

Théorème 18

Si F est un sous-espace de dimension finie de l'espace préhilbertien E, alors $E = F \oplus F^\perp$.

☞ La propriété est évidente si $F = \{0_E\}$. On se limite donc au cas où F est de dimension $n \geqslant 1$. F admet une base orthonormale $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. ✎ (40)

✎ (40) D'après le théorème 15.

Étant donné $x \in E$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, posons $y = x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

On a alors $y \in F^\perp$ si et seulement si $\forall\, k \in [\![1, n]\!], \langle e_k \mid y \rangle = 0$

donc si et seulement si $\forall\, k \in [\![1, n]\!], \langle e_k \mid x \rangle - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_k \mid e_i \rangle = 0$

soit encore si et seulement si $\forall\, k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = \langle e_k \mid x \rangle$.

En conséquence, pour tout x de E, on a $x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle e_i + \left(x - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle e_i \right)$ avec $\sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle e_i \in F$, et, d'après le calcul précédent $\left(x - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle e_i \right) \in F^\perp$.

Ceci montre que $E = F \oplus F^\perp$. ✎ (41)

✎ (41) On sait déjà que F et $F^\perp$ sont en somme directe.

2.3 – Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Définition 28

Soit F un sous-espace de dimension finie de l'espace préhilbertien E.

On alors $E = F \oplus F^\perp$ et le projecteur de noyau $F^\perp$ et d'image F est appelé projection orthogonale sur F.

Théorème 19

Si $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormale du sous-espace F de dimension finie, la projection orthogonale p_F sur F est définie par : ✎ (42)

$$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle e_i .$$

✎ (42) Voir la démonstration du théorème 18.

Copyrighted material

Remarque

Il faut prendre garde au fait que dans le cas d'un espace préhilbertien réel, on peut écrire indifféremment :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle e_i \quad \text{ou} \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle e_i ,$$

alors que dans le cas d'un espace préhilbertien complexe, il faut écrire :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle e_i \quad \text{ou} \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle x \mid e_i \rangle} e_i .$$

Exemple 16 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

$\varphi : (f,g) \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f}\, g$ est un produit scalaire hermitien sur E. On note $\varphi(f,g) = \langle f \mid g \rangle$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit $e_k \in E$ par : $e_k : x \mapsto e^{ikx}$.

a) Vérifier que la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $F_n = \text{Vect}\,(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$, étudier de la projection orthogonale de $f \in E$ sur F_n.

a) Si $k \neq \ell$, $\langle e_k \mid e_\ell \rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(\ell-k)x}\,dx = \frac{1}{2\pi\, i(\ell-k)}\left[e^{i(\ell-k)x}\right]_0^{2\pi} = 0.$

b) $(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormale de F_n, on applique le théorème 19 :

$$p_{F_n}(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \quad \text{avec} \quad c_k = \langle e_k \mid f \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx.$$

Les c_k sont les coefficients de Fourier de f. (43)

(43) Voir Analyse, chapitre 7.

2.4 – Orthogonalisation de Schmidt

Théorème 20

Pour toute famille finie libre $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, il existe une famille libre orthogonale telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_i) = \text{Vect}\,(y_1, \ldots, y_i).$$

(44) On raisonne par récurrence sur n.

- La propriété est claire pour $n = 1$, avec $y_1 = \lambda x_1$ où λ est un scalaire non nul. (44)
- Supposons la propriété vraie pour les familles de n vecteurs, $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ une famille libre de $n+1$ vecteurs.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une famille libre $(y_1, \ldots, y_n)$ orthogonale telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_i) = \text{Vect}\,(y_1, \ldots, y_i)$.

Posons, pour tout i, $H_i = \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_i)$. Il reste à prouver l'existence de y_{n+1}.

- Analyse

Si y_{n+1} existe, on a $y_{n+1} \in H_n^\perp$ et $y_{n+1} \in H_{n+1}$.

Puisque $H_{n+1} = H_n \oplus \mathbb{K}x_{n+1}$, il existe $z_{n+1} \in H_n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$y_{n+1} = z_{n+1} + \lambda x_{n+1} .$$

Alors l'égalité $\lambda x_{n+1} = -z_{n+1} + y_{n+1}$, avec $-z_{n+1} \in H_n$ et $y_{n+1} \in H_n^\perp$, montre que $-z_{n+1}$ est le projeté orthogonal de λx_{n+1} sur H_n.

En notant p_n cette projection orthogonale sur H_n, on a nécessairement :

$$y_{n+1} = \lambda\left(x_{n+1} - p_n(x_{n+1})\right).$$

- Synthèse

Soit $y_{n+1} = \lambda\left(x_{n+1} - p_n(x_{n+1})\right)$, alors $y_{n+1} \in H_n^\perp$ donc $(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$ erst orthogonale et on a :

$$\text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n, y_{n+1})) = \text{Vect}\,(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$$

si et seulement si $\lambda \neq 0$.

Copyrighted material

En conséquence, il y a une infinité de solutions pour y_{n+1}, il s'agit des vecteurs :

$$\lambda\left(x_{n+1} - p_n(x_{n+1})\right) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

Ces solutions décrivent une droite vectorielle privée de 0_E.

La propriété est donc récurrente.

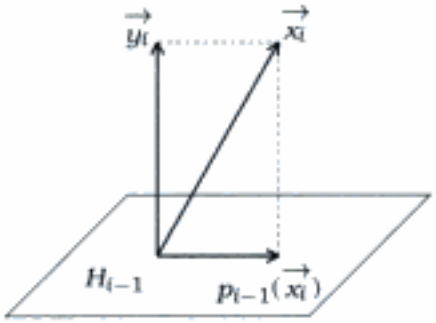
Remarque

Il résulte de cette démonstration que chaque vecteur y_i est défini à un coefficient de colinéarité près.

Dans la pratique, il suffit de construire une famille $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ pour connaître toutes les solutions du problème.

On prendra, par exemple, la famille qui est définie par :

$$y_1 = x_1, \quad \forall i \in [\![2, n]\!],\ y_i = x_i - p_{i-1}(x_i)$$



Exemple 17 Sur $E = \mathbb{C}_2[X]$, $\langle P \mid Q\rangle = \overline{P(1)}Q(1) + \overline{P(i)}Q(i) + \overline{P(-i)}Q(-i)$ définit un produit scalaire hermitien. Détermination d'une base orthogonale (P_0, P_1, P_2) avec $\deg P_k = k$.

a) On vérifie aisément que $\varphi : (P, Q) \mapsto \overline{P(1)}Q(1) + \overline{P(i)}Q(i) + \overline{P(-i)}Q(-i)$ est une forme sesquilinéaire hermitienne sur E.

Elle est positive car $\varphi(P, P) = |P(1)|^2 + |P(i)|^2 + |P(-i)|^2 \geqslant 0$.

Elle est définie car $\varphi(P, P) = 0$ donne $P(1) = P(i) = P(-i) = 0$ et donc $P = 0$, car un polynôme non nul de degré $\leqslant 2$ a au plus deux racines distinctes.

b) On applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$.

$$P_0 = 1,\ P_1 = X - \frac{\langle P_0 \mid X\rangle}{\langle P_0 \mid P_0\rangle}P_0,\ P_2 = X^2 - \frac{\langle P_0 \mid X^2\rangle}{\langle P_0 \mid P_0\rangle}P_0 - \frac{\langle P_1 \mid X^2\rangle}{\langle P_1 \mid P_1\rangle}P_1.$$

On trouve successivement :

$\langle P_0 \mid X\rangle = 1 + i - i = 1$, $\langle P_0 \mid P_0\rangle = 3$ donc $P_1 = X - \dfrac{1}{3}$;

$\langle P_0 \mid X^2\rangle = 1 - 1 - 1 = -1$, $\langle P_1 | X^2 \mid = \rangle \dfrac{2}{3} + \left(-i - \dfrac{1}{3}\right) \times (-1) + \left(i - \dfrac{1}{3}\right) \times (-1) = \dfrac{4}{3}$;

$\langle P_1 \mid P_1\rangle = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left|i - \dfrac{1}{3}\right|^2 + \left|-i - \dfrac{1}{3}\right|^2 = \dfrac{8}{3}$ donc $P_2 = X^2 - \dfrac{X}{2} + \dfrac{1}{2}$.

Théorème 21

Orthonormalisation

Pour toute famille libre $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, il existe au moins une famille libre orthonormale telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \text{Vect}(x_1, \ldots, x_i) = \text{Vect}(y_1, \ldots, y_i)$$

☞ Il suffit de prendre la famille y_i définie par :

$$y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![2, n]\!],\ y_i = \frac{x_i - p_{i-1}(x_i)}{\|x_i - p_{i-1}(x_i)\|}.$$

Remarque. Cas des espaces préhilbertiens réels

Théorème 22

Pour toute famille libre $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, il existe une unique famille orthonormale telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \text{Vect}(x_1, \ldots, x_i) = \text{Vect}(y_1, \ldots, y_i),\ \langle x_i \mid y_i\rangle > 0.$$

Copyrighted material

Hidden page

☞ **(1) ⇒ (2)**

p étant projecteur orthogonal, on a :

$$\langle x \mid p(y)\rangle = \langle x - p(x) \mid p(y)\rangle + \langle p(x) \mid p(y)\rangle = \langle p(x) \mid p(y)\rangle$$

car $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p (\operatorname{Im} p)^{\perp}$ et $p(y) \in \operatorname{Im} p$; de même $\langle p(x) \mid y\rangle = \langle p(x) \mid p(y)\rangle$.

(2) ⇒ (3)

On applique **(2)** avec $y = p(x)$, ce qui donne alors $p(y) = p^2(x) = p(x)$.

Il vient $\| p(x)\|^2 = \langle x \mid p(x)\rangle$, donc, d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\| p(x)\|^2 \leqslant \| x\| \, \| p(x)\|,$$

et pour $p(x) \neq 0$, par simplification par $\| p(x)\|$, on obtient :

$$\| p(x)\| \leqslant \| x\|.$$

Pour $p(x) = 0$, cette inégalité est encore vérifiée.

(3) ⇒ (1)

Supposons que le projecteur p ne soit pas orthogonal, il existe alors $x \in \operatorname{Im} p$ et $y \in \operatorname{Ker} p$ tels que $\langle x \mid y\rangle \neq 0$, donc $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Avec $\lambda = -\dfrac{\langle y \mid x\rangle}{\| y\|^2}$, on obtient $\langle y \mid x + \lambda y\rangle = 0$ et $\lambda \neq 0$, puis, d'après le théorème de Pythagore : $\| x\|^2 = \| x + \lambda y\|^2 + |\lambda|^2 \| y\|^2$ donc $\| x\| > \| x + \lambda y\|$.

Cette dernière inégalité est en contradiction avec **(3)** car $p(x + \lambda y) = p(x) = x$.

Propriété 24

Soit s une symétrie de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) s est une symétrie orthogonale ;

(2) $\forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid s(y)\rangle = \langle s(x) \mid y\rangle$;

(3) $\forall x \in E, \| s(x)\| = \| x\|$.

☞ **(1) ⇒ (2)**

Le projecteur p associé à s ✎ (46) étant orthogonal, il vient :

$$\langle x \mid p(y)\rangle = \langle p(x) \mid y\rangle$$

donc $\langle x \mid s(y)\rangle = 2\langle x \mid p(y)\rangle - \langle x \mid y\rangle = 2\langle p(x) \mid y\rangle - \langle x \mid y\rangle = \langle s(x) \mid y\rangle$.

(2) ⇒ (3)

On applique **(2)** avec $y = s(x)$ ✎ (47) et il vient $\langle x \mid x\rangle = \langle s(x) \mid s(x)\rangle$.

(3) ⇒ (1)

On reprend la démonstration **(3) ⇒ (1)** de la propriété 23. Alors $s(x + \lambda y) = x - \lambda y$, puis ✎ (48) $\| x - \lambda y\|^2 = \| x + \lambda y\|^2 + 4|\lambda|^2 \| y\|^2$ donc $\| x - \lambda y\| \neq \| x + \lambda y\|$ ce qui est en contradiction avec **(3)**.

✎ (46) $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

✎ (47) Donc $s(y) = x$.

✎ (48) Théorème de Pythagore.

Interprétation géométrique dans un espace préhilbertien réel

Tout se passe dans le plan $\operatorname{Vect}(x, y)$, on est ainsi ramené à un problème de géométrie plane.

Le choix de λ fait apparaître deux triangles rectangles.

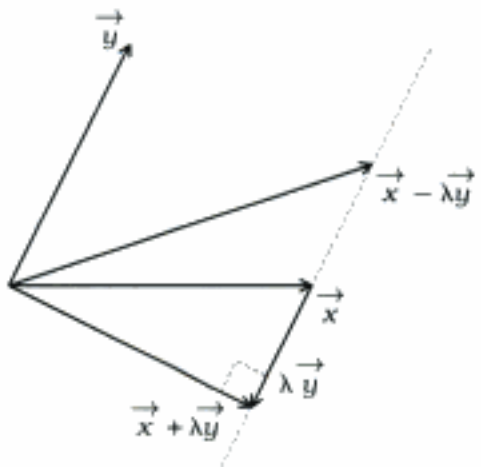
Dans chacun de ces triangles, la longueur de l'hypoténuse est strictement supérieure à la longueur d'un côté de l'angle droit.

Pour la propriété 23, cela donne :

$$\| x\| > \| x + \lambda y\|$$

et, pour la propriété 24 :

$$\| x - \lambda y\| > \| x + \lambda y\|.$$



Copyrighted material

Théorème 23

Distance d'un vecteur à un sous-espace

Soit $x \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E :

a) l'ensemble $\{y \in F \,/\, d(x,F) = \|x-y\|\}$ a au plus un élément ;

b) soit $x_0 \in F$, on a $d(x,F) = \|x-x_0\|$ si et seulement si $x - x_0 \in F^\perp$;

c) si F admet un supplémentaire orthogonal, ce qui est le cas lorsque F est de dimension finie, on a $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$ où p_F est la projection orthogonale sur F.

☞ Rappelons que E étant un espace vectoriel normé, pour tout x de E et toute partie non vide A de E, la distance de x à A est $d(x,A) = \inf\{\|x-y\| \,/\, y \in A\}$.

a) Soit y et z dans F tels que $\|x-y\| = \|x-z\| = d(x,F)$.
L'identité du parallélogramme appliquée aux vecteurs $x-y$ et $x-z$ donne :

$$\|2x-y-z\|^2 + \|y-z\|^2 = 2\|x-y\|^2 + 2\|x-z\|^2$$

d'où $\|y-z\|^2 = 4d(x,F)^2 - 4\left\|x - \dfrac{y+z}{2}\right\|^2$.

Puisque F est un sous-espace vectoriel de E, on a $\dfrac{y+z}{2} \in F$ donc $\left\|x - \dfrac{y+z}{2}\right\| \geqslant d(x,F)$ et avec l'égalité précédente il vient $\|y-z\|^2 \leqslant 0$, d'où enfin $y = z$. [49]

[49] On peut remarquer que cette démonstration reste valable dans le cas où F est seulement supposé être un convexe de E.

[50] Théorème de Pythagore.

b) ▪ Supposons $x - x_0 \in F^\perp$.
Alors, pour tout y de F, $\|x-y\|^2 = \|x-x_0\|^2 + \|x_0-y\|^2$, [50] donc $\|x-y\| \geqslant \|x-x_0\|$. Il en résulte $d(x,F) = \|x-x_0\|$.
▪ Supposons $d(x,F) = \|x-x_0\|$.

Si $x - x_0 \notin F^\perp$, il existe $y \in F$ tel que $\langle x-x_0 \,|\, y\rangle \neq 0$ et, en posant $\lambda = \dfrac{\langle y \,|\, x-x_0\rangle}{\|y\|^2}$, on obtient $\langle y \,|\, x - x_0 - \lambda y\rangle = 0$.

Avec le théorème de Pythagore, il vient $\|x-(x_0+\lambda y)\|^2 = \|x-x_0\|^2 - |\lambda|^2\|y\|^2$ donc :

$$\|x-(x_0+\lambda y)\| < \|x-x_0\| \quad \text{car} \quad |\lambda| \neq 0.$$

Cette dernière inégalité est en contradiction avec :

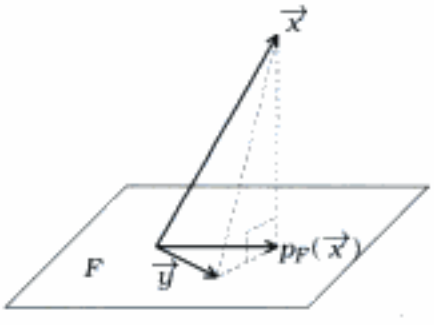
$$\|x-x_0\| = d(x,F) = \inf\{\|x-z\| / z \in F\} \quad \text{et} \quad x_0 + \lambda y \in F$$

en conséquence, on a $x - x_0 \in F^\perp$.

Interprétation géométrique

Si $\vec{y} \neq p_F(\vec{x})$, dans le triangle rectangle la longueur de l'hypothénuse est strictement supérieure à la longueur d'un côté de l'angle droit :

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| > \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|.$$



Exemple 18 Distance d'un vecteur à un hyperplan

Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$ dans E, D la droite $\mathbb{K}a$ et H l'hyperplan orthogonal de a.
Expression de $d(x,D)$ et $d(x,H)$ en fonction de $\|x\|$ et $\langle a \,|\, x\rangle$.

On a ici $E = D \oplus H$, $H = D^\perp$, $p_D(x) = \dfrac{\langle a \,|\, x\rangle}{\|a\|^2}a$, $p_H(x) = x - \dfrac{\langle a \,|\, x\rangle}{\|a\|^2}a$

$d(x,H) = \|x - p_H(x)\| = \|p_D(x)\|$ donc $d(x,H) = \dfrac{|\langle a \,|\, x\rangle|}{\|a\|}$

$d(x,D) = \|x - p_D(x)\| = \|p_H(x)\|$, or d'après le théorème de Pythagore :

$\|x\|^2 = \|p_D(x)\|^2 + \|p_H(x)\|^2$ donc $d(x,D)^2 = \|x\|^2 - \dfrac{|\langle a \,|\, x\rangle|^2}{\|a\|^2}$.

Copyrighted material

Exemple 19 Expression analytique de la distance d'un vecteur x à un sous-espace F de dimension finie et à son orthogonal

Soit F un sous-espace de dimension finie $n \geqslant 1$, et $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormale de F.

On exprime $d(x, F)$ et $d(x, F^\perp)$ en fonction de $\|x\|$ et des produits scalaires $\langle u_i \mid x\rangle$.

On a $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i \mid x\rangle u_i$. $p_{F^\perp}(x) = x - \sum_{i=1}^{n} \langle u_i \mid x\rangle u_i$.

$d(x, F^\perp) = \|x - p_{F^\perp}(x)\| = \|p_F(x)\|$ donc $d(x, F^\perp)^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle u_i \mid x\rangle|^2$

$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|$, or, d'après le théorème de Pythagore :

$\|x\|^2 = \|p_{F^\perp}(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2$ donc $d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle u_i \mid x\rangle|^2$.

4. Matrice d'un produit scalaire (dimension finie)

L'espace préhilbertien $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ est maintenant supposé de dimension finie $n \geqslant 1$.

Définition 32

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E, la matrice [51] du produit scalaire $\varphi : (x, y) \mapsto \langle x \mid y\rangle$ est la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général $a_{ij} = \langle e_i \mid e_j\rangle$.

On note $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\,\varphi = [\langle e_i \mid e_j\rangle]$. [52]

[51] Dans la base $\mathcal{B}$.

[52] Dans le cas euclidien : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on retrouve la matrice d'une forme bilinéaire (voir définition 2).

Propriété 25

Soit $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\,\varphi$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, [53] alors $A = {}^tA$: A est **symétrique réelle**.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, [54] alors $A = {}^t\overline{A}$: la matrice A est égale à sa transconjuguée.
  On dit que c'est une **matrice hermitienne**.

[53] Produit scalaire euclidien.

[54] Produit scalaire hermitien.

Propriété 26

$\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormale si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\,\varphi = I_n$.

Propriété 27

Écriture matricielle du produit scalaire

Aux vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, on associe leurs matrices :

$$X = [x_i] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ et } Y = [y_j] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ dans la base } \mathcal{B}.$$

a) Cas euclidien : $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\,\varphi \iff \forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid y\rangle = {}^tXAY$.

b) Cas hermitien : $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\,\varphi \iff \forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid y\rangle = {}^t\overline{X}AY$.

☞ Démontrons b).

On pose $A = [a_{ij}]$.

$\langle x \mid y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{x_i} y_j \langle e_i \mid e_j\rangle$ donc si $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\,\varphi$, $\langle x \mid y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{x_i} y_j a_{ij} = {}^t\overline{X}AY$.

Réciproquement, si $\forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid y\rangle = {}^t\overline{X}AY$ alors, en appliquant cette égalité avec $x = e_i$ et $y = e_j$, on obtient $a_{ij} = \langle e_i \mid e_j\rangle$.

Copyrighted material

Propriété 28

Changement de base

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:

$$P = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\left(e'_1, \ldots, e'_n\right).$$

On pose $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\,\varphi$ et $A' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}\,\varphi$.

a) Cas euclidien : $A' = {}^tPAP$.

b) Cas hermitien : $A' = {}^t\overline{P}AP$.

✎ (55) Le cas a) est réglé par la propriété 6.

☞ Démontrons b). ✎ (55)

Pour tout $(x, y) \in E^2$, soit $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $X' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(x)$, $Y = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(y)$, $Y' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(y)$ on a alors $X = PX'$, $Y = PY'$, donc :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x \mid y \rangle = {}^t\overline{X}AY = {}^t\left(\overline{PX'}\right)A\left(PY'\right) \ .\ \langle x \mid y \rangle = {}^t\overline{X'}\left({}^t\overline{P}AP\right)Y'$$

et, d'après la propriété 27 b), $A' = {}^t\overline{P}AP$

Propriété 29

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice d'un produit scalaire, on a :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \det A > 0.$$

☞ D'après le théorème 15, il existe au moins une base orthonormale, donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$${}^tPAP = I_n \text{ (cas euclidien) ou } {}^t\overline{P}AP = I_n \text{ (cas hermitien)}$$

d'où on déduit $\det A = \dfrac{1}{(\det P)^2}$ (cas euclidien),

ou $\det A = \dfrac{1}{|\det P|^2}$ (cas hermitien).

Exemple 20 La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j+1}$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, est inversible et $\det A > 0$.

Il suffit d'interpréter A comme la matrice d'un produit scalaire euclidien.

On remarque que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$:

$$\frac{1}{i+j+1} = \int_0^1 x^{i+j}\,\mathrm{d}x \ .$$

Introduisons donc l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2,\ \langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

A est la matrice de ce produit scalaire sur la base canonique, donc A est inversible avec $\det A > 0$.

Copyrighted material

Hidden page

Méthodes

III. Espaces préhilbertiens complexes

✔ Les résultats plus familiers pour un produit scalaire euclidien restent vrais pour un produit scalaire hermitien.

Toutefois, les moyens utilisés diffèrent en intermédiaires de calcul, principalement :

$\langle v \mid u \rangle = \overline{\langle u \mid v \rangle}$, $\langle \alpha u \mid v \rangle = \overline{\alpha} \langle u \mid v \rangle$.

$\| (u+v) \|^2 = \| u \|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle u \mid v \rangle + \| v \|^2$,

$\| \alpha u \|^2 = \alpha \overline{\alpha} \| u \|^2$,

$\| (u+iv) \|^2 = \| u \|^2 - 2 \operatorname{Im} \langle u \mid v \rangle + \| v \|^2$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 7

✔ **Si l'on veut** calculer la norme (hermitienne) d'un vecteur u,

▪ **on peut** utiliser ses coordonnées (a_k) dans une base orthonormale $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

✔ La norme de u a pour carré $\sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k|^2$.

Attention à ne pas oublier le module des a_k !

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 8

Copyrighted material

Mise en œuvre

I. Formes quadratiques positives

Ex. 1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont la forme quadratique q canoniquement associée est positive (resp. définie-positive).

Montrer que la forme quadratique q_p associée à M^p ($p \in \mathbb{N}^*$) est également positive (resp. définie-positive).

Indications

La symétrie de M est bien entendu essentielle. On l'utilise dans la forme matricielle de q_p.

Il y a lieu de distinguer selon la parité de p.

Solution

1) Premier cas : p est pair, $p = 2k$.

Pour tout $X = [x_i] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec $Y = M^k X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il vient :

$$ {}^tXM^{2k}X = {}^t\left(M^kX\right) \cdot \left(M^kX\right) = {}^tY \cdot Y.$$

- Avec $Y = [y_i]$, on a ${}^tY \cdot Y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geqslant 0$. Donc q_{2k} est positive.
- D'autre part, ${}^tY \cdot Y = 0$ exige $Y = 0$.

Si q est définie, alors M^k est inversible. Donc $Y = M^kX = 0$ exige alors $X = 0$, ce qui montre que q_{2k} est définie.

2) Second cas : p est impair, $p = 2k + 1$.

On a ${}^tXM^{2k+1}X = {}^t(M^kX) \cdot M \cdot (M^kX) = {}^tYMY \geqslant 0$.

- Donc q_{2k+1} est positive.
- Si q est définie, ${}^tYMY = 0$ exige $Y = 0$, ce qui donne encore $X = 0$; donc q_{2k+1} est définie.

Commentaires

On utilise la symétrie de M.

Remarquer que ceci n'utilise pas l'hypothèse de positivité de M.

M est inversible.

Avec les notations précédentes.

Même raison qu'en 1).

Ex. 2

On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $q : A \mapsto \mathrm{Tr}\left({}^tAA\right)$ est une forme quadratique définie-positive sur E. Préciser sa forme polaire.

2) Montrer que $q_1 : A \mapsto \mathrm{Tr}\left(A^2\right)$ est une forme quadratique sur E et prouver qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}\, q_1 = \begin{pmatrix} \frac{I_{n(n+1)}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{I_{n(n-1)}}{2} \end{pmatrix}$.

Indications

1) Pour $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Tr}\left({}^tAA\right) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$.

2) Considérer les restrictions de q_1 à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et utiliser que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Solution

1) Soit $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = {}^tAA = [m_{ij}]$.

On a alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$ donc :

Commentaires

Le calcul de $q(A)$ en fonction des a_{ij} fait apparaître une situation usuelle.

$$\mathrm{Tr}\left({}^tAA\right) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

Sous cette forme, il est clair que q est une forme quadratique définie-positive sur E. Plus précisément puisque les a_{ij} sont les coordonnées de A sur $\left(E_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ base canon ique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $A \mapsto \sqrt{q(A)}$ n'est autre que la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Les E_{ij} sont les matrices élémentaires : $E_{ij} = [\delta_{ki}\delta_{\ell j}]_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant \ell\leqslant n}}$.

Considérons maintenant l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$. φ est une forme bilinéaire sur E^2 dont la symétrie résulte des propriétés usuelles de la trace :

Il est clair que φ est bilinéaire et que $\forall A \in E$, $q(A) = \varphi(A,A)$. Il reste à s'assurer de sa symétrie.

$$\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right) = \mathrm{Tr}\left({}^t\left({}^tAB\right)\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tBA\right) = \varphi(B, A)$$

φ étant bilinéaire-symétrique et telle que $\forall A \in E, q(A) = \varphi(A, A)$, il s'agit de la forme polaire de q.

Remarque

On a ainsi trouvé une expression simple du produit scalaire euclidien canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \left\langle A \,\middle|\, B \right\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right).$$

Il est bon de retenir ce résultat.

2) Il est clair que $\varphi_1 : (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique sur E donc q_1 est une forme quadratique.

$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ est une propriété usuelle de l'application Trace.

Si A est symétrique, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$q_1(A) = \mathrm{Tr}\left({}^tAA\right) = q(A).$$

Donc la restriction q_1^s de q_1 à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie-positive et il existe une base $\mathcal{B}_s$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que :

On applique le théorème d'existence des bases orthonormales dans un espace préhilbertien de dimension finie.

$$\underset{\mathcal{B}_s}{\mathrm{mat}}\, q_1^s = I_{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Si A est antisymétrique, $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$q_1(A) = -\mathrm{Tr}\left({}^tAA\right) = -q(A).$$

Donc la restriction q_1^a de q_1 à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est définie et négative et il existe une base $\mathcal{B}_a$ de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\underset{\mathcal{B}_a}{\mathrm{mat}}\, q_1^a = -I_{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Remarquons maintenant que si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors :

$$\varphi_1(A, B) = \mathrm{Tr}\left({}^t(AB)\right) = -\mathrm{Tr}(BA) = -\varphi_1(A, B)$$

donc $$\varphi_1(A, B) = 0.$$

En conséquence, en notant $\mathcal{B} = \left(B_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n^2}$ la base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ «réunion» de $\mathcal{B}_s$ et $\mathcal{B}_a$, on a :

$\mathcal{B}$ est une base adpatée à la somme directe : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

- pour $(i,j) \in \left[\!\left[1, \frac{n(n+1)}{2}\right]\!\right]^2$, $\varphi_1\left(B_i, B_j\right) = \delta_{ij}$;
- pour $(i,j) \in \left[\!\left[1 + \frac{n(n+1)}{2}, n^2\right]\!\right]$, $\varphi_1\left(B_i, B_j\right) = -\delta_{ij}$;
- pour $(i,j) \in \left[\!\left[1, \frac{n(n+1)}{2}\right]\!\right] \times \left[\!\left[1 + \frac{n(n+1)}{2}, n^2\right]\!\right]$, $\varphi_1\left(B_i, B_j\right) = 0$;

donc :

$$\underset{\mathcal{CB}}{\mathrm{mat}}\, q_1 = \left[\varphi_1\left(B_i, B_j\right)\right] = \begin{bmatrix} I_{\frac{n(n+1)}{2}} & 0 \\ 0 & -I_{\frac{n(n-1)}{2}} \end{bmatrix}.$$

Copyrighted material

Ex. 3

Soit $\mathscr{E} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de vecteurs d'un espace préhibertien réel E telle que :

$$\forall x \in E,\ \| x \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k \rangle^2. \qquad (1)$$

Montrer que E et de dimension finie, au plus égale à n, et que $\mathscr{E}$ est une base orthonormale de E dans l'un ou l'autre des cas suivants : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \| e_k \| \geqslant 1$, ou $\mathscr{E}$ est une famille libre.

Indications

Étudier l'orthogonal du sous-espace $F = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$ engendré par $\mathscr{E}$.

Pour qu'une famille finie soit libre, il suffit qu'elle soit orthonormale.

Solution

1) Considérons le sous-espace vectoriel F de E engendré par la famille $\mathscr{E}$.
Son orthogonal est un supplémentaire de F dans E.
Pour tout $x \in F^\perp$, on a $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \langle x \mid e_k \rangle = 0$.
Alors **(1)** donne $\| x \|^2 = 0$, donc $x = 0$.
Il s'ensuit $E = F$, donc E est de dimension finie au plus égale à n.

2) ▪ **Premier cas** : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \| e_k \| \geqslant 1$.
On applique **(1)** à e_j : $\| e_j \|^2 = \| e_j \|^4 + \sum_{k \neq j} \langle e_j \mid e_k \rangle^2 \geqslant \| e_j \|^4$.
$\| e_j \| \geqslant 1$ et $\| e_j \|^2 \geqslant \| e_j \|^4$ donne $\| e_j \| = 1$.
Il s'ensuit $\sum_{k \neq j} \langle e_j \mid e_k \rangle^2 = 0$ donc $\langle e_j \mid e_k \rangle = 0$ pour tout $k \neq j$.
La famille $\mathscr{E}$ est donc orthonormale et génératrice de E ; c'est une base orthonormale de E.

▪ **Deuxième cas** : $\mathscr{E}$ est une famille libre.
Pour $j \in [\![1, n]\!]$, le sous-espace H_j engendré par $\mathscr{E} \setminus \{e_j\}$ est un hyperplan.
Pour tout $x \in H_j^\perp$ et tout $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$, on a $\langle x \mid e_k \rangle = 0$ et, avec **(1)**, il vient : $\| x \|^2 = \langle x \mid e_j \rangle^2$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors $\| x \|^2 \leqslant \| x \|^2 \| e_j \|^2$.
On en déduit $\| e_j \| \geqslant 1$, et on est ramené au premier cas.

▪ **Utilité de l'hypothèse**
On prend pour espace E une droite euclidienne.
Étant donné $u \in E$ normé, on considère $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}} u$ et la famille $\mathscr{E} = (v, v)$.
Pour tout $x \in E$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = \lambda v$. Alors :

$$\langle x \mid v \rangle^2 = \lambda^2 \| v \|^2 = \frac{\lambda^2}{4}.$$

Il s'ensuit $\sum_{w \in \mathscr{E}} \langle x \mid w \rangle^2 = \dfrac{\lambda^2}{2}$.
Ainsi, $\mathscr{E}$ vérifie **(1)** mais n'est pas une base.

Commentaires

F est de dimension finie, sans hypothèse *a priori* sur la dimension de E.

$E = F \oplus F^\perp$ et $F = \{0\}$.

$j \in [\![1, n]\!]$ quelconque.

$t \in \mathbb{R}$, $t^2(1 - t^2) \geqslant 0 \Rightarrow t^2 \leqslant 1$.

Toute famille finie orthonormale est libre.

C'est alors une base de E.

$H_j^\perp$ est une droite vectorielle.

En choisissant $x \neq 0$ dans $H_j^\perp$.

Elle n'est évidemment pas libre, mais c'est l'objet du contre-exemple.

Noter que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \| v \| < 1$.

Par ailleurs, $\| x \|^2 = \lambda^2 \| v \|^2 = \dfrac{\lambda^2}{2}$.

Copyrighted material

Ex. 4

Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit a, b réels, $a < b$, et φ une fonction réelle continue strictement positive sur $[a, b]$.

Sur l'espace $\mathbb{R}[X]$, on considère le produit scalaire euclidien défini par $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_a^b \varphi(t)P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la base $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\deg P_k = k$.

2) Montrer que pour $p \in \mathbb{N}^*$, le polynôme XP_p appartient au sous-espace $\mathrm{Vect}\{P_{p-1}, P_p, P_{p+1}\}$.

En déduire une relation de récurrence de la forme $a_n P_n + (b_n + X)P_{n+1} + c_n P_{n+2} = 0$, avec des suites (a_n), (b_n), (c_n) réelles.

Indications

L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt se révèle lourd à mettre en œuvre dès que la dimension n'est pas (très) petite. En revanche, il est bien utile pour l'existence d'une base orthonormale adaptée à une base donnée.

Des polynômes de degrés échelonnés constituent une famille libre.

On pourra établir que XP_p est orthogonal aux P_k, $k < p - 1$.

Solution

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_k est de la forme $\rho_k \left(X^k + \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j X^j \right)$

avec λ_j, $0 \leqslant j \leqslant k$, réels et ρ_k réel non nul.

Il est clair que P_k est de degré k.

2) Avec $\deg(XP_p) = p + 1$, on a $XP_p \in \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \ldots, P_{p+1})$.

Pour $q \in \mathbb{N}$, on a $\langle XP_p \mid P_q \rangle = \displaystyle\int_a^b \varphi(t)tP_p(t)P_q(t)\,\mathrm{d}t = \langle P_p \mid XP_q \rangle$.

Avec $\deg(XP_q) = q + 1$, on a $\langle P_p \mid XP_q \rangle = 0$ dès que $p > q + 1$.

Autrement dit, $\langle XP_p \mid X_q \rangle = 0$ pour tout $q < p - 1$.

On en déduit que XP_p appartient à $\mathrm{Vect}(P_{p-1}, P_p, P_{p+1})$.

Il existe alors des réels a_p, b_p et c_p tels que :

$$XP_p = a_p P_{p-1} + b_p P_p + c_p P_{p+1}.$$

Commentaires

On peut en fait observer que les conditions :

(1) $\forall k \in [\![0, n]\!], \deg P_k = k$ et

(2) $\forall k \in [\![0, n]\!]$,

$\mathrm{Vect}(1, \ldots, X^k) = \mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_k)$

sont équivalentes.

Base (orthonormale) de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$.

Les $\langle XP_p \mid P_k \rangle$ sont les coordonnées de XP_p dans la base $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant p+1}$.

Résultat attendu.

Ex. 5

1) Vérifier que $\varphi : (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire euclidien sur $E = \mathbb{R}_3[X]$.

On note $\varphi(P, Q) = \langle P \mid Q \rangle$.

2) Trouver le projeté orthogonal du polynôme X^3 sur $F = \mathbb{R}_2[X]$.

Indications

Pour l'intégrabilité, utiliser le critère de domination. Un vecteur est orthogonal à un sous-espace vectoriel F si et seulement si il est orthogonal aux vecteurs d'une base de F.

Solution

1) Montrons que la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Pour cela, au voisinage de $+\infty$, on a :

$P(x)Q(x) = o(x^7)$ et $e^{-x} = o\left(\dfrac{1}{x^9}\right)$ donc $P(x)Q(x)e^{-x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$,

Commentaires

Pour tout $(P, Q) \in E^2$.

La fonction est évidemment continue.

Copyrighted material

on en déduit l'intégrabilité avec le critère de domination. Il est clair que φ est bilinéaire symétrique.

Si $P \in E \setminus \{0\}$, la fonction $x \mapsto P^2(x)e^{-x}$ est continue, positive, donc $\int_0^1 P^2(x)e^{-x}\,dx > 0$ et on obtient *a fortiori* $\varphi(P,P) > 0$.

et non identiquement nulle sur $[0,1]$.

$\varphi(P,P) \geqslant \int_0^1 P^2(x)e^{-x}\,dx$.

2) $P = a + bX + cX^2$ est le projeté orthogonal de X^3 sur $F = \mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si $X^3 - P \in F^\perp$.

C'est-à-dire si et seulement si $X^3 - P$ est orthogonal à 1, à X et à X^2.

Le triplet (a, b, c) est donc défini par le système :

$$\begin{array}{rcrcrcl} a\langle 1 \mid 1\rangle & + & b\langle X \mid 1\rangle & + & c\langle X^2 \mid 1\rangle & = & \langle X^3 \mid 1\rangle \\ a\langle 1 \mid X\rangle & + & b\langle X \mid X\rangle & + & c\langle X^2 \mid X\rangle & = & \langle X^3 \mid X\rangle \\ a\langle 1 \mid X^2\rangle & + & b\langle X \mid X^2\rangle & + & c\langle X^2 \mid X^2\rangle & = & \langle X^3 \mid X^2\rangle \end{array}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$ donne :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ \langle X^n \mid X^p\rangle = (n+p)!.$$

Un calcul auxiliaire usuel.

Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} a + b + 2c = 6 \\ a + 2b + 6c = 24 \\ 2a + 6b + 24c = 120 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + 2c = 6 \\ b + 4c = 18 \\ 2b + 10c = 54 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b + 2c = 6 \\ b + 4c = 18 \\ 2c = 18 \end{cases}$$

Systèmes équivalents obtenus par la méthode du pivot de Gauss.

On en déduit $c = 9$, $b = -18$, $a = 6$.

Le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est donc $P = 6 - 18X + 9X^2$.

Ex. 6

Calculer $\lambda = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} \left(x^3 + ax^2 + bx + c\right)^2 e^{-x}\,dx$.

Indications

Dans l'exercice précédent, a vu que $(P,Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,dx$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

Le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est $P_0 = 9X^2 - 18X + 6$.

Il s'agit ici de calculer $\inf_{P\in\mathbb{R}_2[X]} \|X^3 - P\|^2$ $\left(P = -aX^2 - bX - c \text{ décrit } \mathbb{R}_2[X]\right)$.

Solution

$\lambda = d\left(X^3, \mathbb{R}_2[X]\right)^2 = \|X^3 - P_0\|^2$.

D'après le théorème de Pythagore, on a aussi :

$$\|X^3 - P_0\|^2 = \|X^3\|^2 - \|P_0\|^2.$$

Donc, avec $P_0^2 = 81X^4 - 324X^3 + 432X^2 - 216X + 36$, compte tenu de $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$, on obtient :

$$\left\|X^3 - P_0\right\|^2 = 6! - 81 \cdot 4! + 324 \cdot 3! - 432 \cdot 2! + 216 \cdot 1! - 36 \cdot 0!$$

On conclut alors $\lambda = 36$.

Calcul désagréable mais facile.

Commentaires

P_0 projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Car $P_0 \perp X^3 - P_0$.

Ex. 7

Similitudes

Soit E un espace vectoriel hermitien. $f \in \mathscr{L}(E)$ est appelé une similitude quand il existe λ réel, $\lambda > 0$, tel que :

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \lambda \|x\|. \qquad (1)$$

1) Montrer que la condition **(1)** équivaut à :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x) \,|\, f(y)\rangle = \lambda^2 \langle x \,|\, y\rangle. \qquad (2)$$

2) Montrer que, si E est de dimension finie, alors l'ensemble des similitudes est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

Donner un contre-exemple si E n'est pas de dimension finie.

Indications

Les similitudes d'un espace vectoriel réel sont plus familières.

Une importante différence de calcul est $\langle x \,|\, y\rangle = \overline{\langle y \,|\, x\rangle}$ au lieu de la symétrie dans le cas réel.

Solution

1) L'implication **(2)** $\Rightarrow$ **(1)** est banale en tenant compte de $\lambda > 0$.

Pour la réciproque, formons $\|f(x+y)\|^2$. Il vient :

$$\|f(x+y)\|^2 = \|f(x)\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle f(x) \,|\, f(y)\rangle + \|f(y)\|^2.$$

Avec $\|f(x+y)\|^2 = \lambda^2 \|x+y\|^2$, il vient :

$$\|f(x+y)\|^2 = \lambda^2 \left(\|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x \,|\, y\rangle + \|y\|^2\right).$$

On en déduit $\mathrm{Re}\,\langle f(x) \,|\, f(y)\rangle = \lambda^2\,\mathrm{Re}\,\langle x \,|\, y\rangle$.

De même, en développant $\|f(x+iy)\|^2$ et $\lambda^2\|x+iy\|^2$, il vient :

$$\lambda^2\,\mathrm{Im}\,\langle x \,|\, y\rangle = \mathrm{Im}\,\langle f(x) \,|\, f(y)\rangle, \text{ puis } \langle f(x) \,|\, f(y)\rangle = \lambda^2 \langle x \,|\, y\rangle.$$

2) Injectivité : $f(x) = 0 \Rightarrow \|f(x)\| = 0 \Rightarrow \lambda\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

En dimension finie, une similitude est alors bijective.

Si f, g sont des similitudes de rapports λ, μ dans $\mathbb{R}_+^*$, alors :

$$\forall x \in E,\ \|(f \circ g)(x)\| = \|f(g(x))\| = \lambda\|g(x)\| = \lambda\mu\|x\|,$$

donc $f \circ g$ est une similitude de rapport $\lambda\mu$.

Pour tout $x \in E$,

$$\|f(f^{-1}(x))\| = \lambda\|f^{-1}(x)\| \Rightarrow \|f^{-1}(x)\| = \frac{1}{\lambda}\|x\|,$$

donc f^{-1} est une similitude de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$.

▪ **Contre-exemple** hors dimension finie.

En exemple 14 du cours, on a installé l'espace préhilbertien complexe E des suites de carré sommable.

À $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $v_0 = 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n-1}$.

$f : E \to E$ ainsi définie n'est évidemment pas surjective.

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n^2$ donne $\|f(u)\| = \|u\|$.

f est alors une isométrie non surjective.

Commentaires

Il suffit de prendre $y = x$.

Avec $f(x+y) = f(x)+f(y)$.

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle u \,|\, v\rangle + \|v\|^2$.

$\|u+iv\|^2 = \|u\|^2 - 2\,\mathrm{Im}\langle u \,|\, v\rangle + \|v\|^2$.

Égalité des parties réelles et imaginaires.

Tout le traitement de cette deuxième partie ne présente aucune différence formelle avec les similitudes en espace préhilbertien réel.

f est bijective.

À l'analogue des suites réelles de même type vu en exemple 13.

La suite $(\delta_{0,n})$ n'a pas d'antécédent.

$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Similitude de rapport 1.

Copyrighted material

Hidden page

Exercices

Niveau 1

Ex. 1

Soit φ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n. Soit f une application surjective de E sur E telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \varphi\big(f(x), f(y)\big) = \varphi(x, y).$$

Montrer que f est un automorphisme de E.

Ex. 2

Dans $\mathbb{R}^n$ rapporté à sa base canonique, déterminer le rang de la forme quadratique :

$$q(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (x_i - x_j)^2.$$

Ex. 3

Soit n un entier naturel non nul.

Trouver les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ tels que :

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 &+ \cdots &+ x_n &= n \\ x_1^2 &+ x_2^2 &+ \cdots &+ x_n^2 &= n \end{aligned}$$

Ex. 4

Soit $A = \left[a_{k\ell}\right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec :

$$a_{k\ell} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin kx \sin \ell x \, dx.$$

Montrer que $\det A > 0$.

Ex. 5

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

1) Montrer que $|\det A| \leqslant 1$.

2) Étudier les cas d'égalité.

Ex. 6

Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique, former la matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{B}$ de la symétrie orthogonale par rapport au plan H d'équations :

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0,\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

Niveau 2

Ex. 7

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f une forme bilinéaire sur E^2 telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ f(x, y) = 0 \ \Rightarrow\ f(y, x) = 0. \qquad (1)$$

Montrer que f est symétrique ou antisymétrique.

Ex. 8

Soit q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $A = \left[a_{ij}\right]$ et soit q' la forme quadratique de $\mathbb{R}^{n-1}$ définie sur la base canonique de $\mathbb{R}^{n-1}$ par :

$$q'(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} x_i x_j \begin{vmatrix} a_{nn} & a_{ni} \\ a_{nj} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

Montrer que q' est définie positive.

Ex. 9

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa structure euclidienne canonique, et $\mathcal{C}$ l'ensemble des polynômes $P \in E$ scindés dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $\mathcal{C}$ est un cône fermé de E.

2) Calculer la distance de $A = X^2 + 1$ à $\mathcal{C}$.

Ex. 10

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-ensemble non vide de E convexe et complet.

1) Montrer que, pour tout a de E, il existe $b \in F$, unique, tel que : $d(a, F) = \| b - a \|$.

2) En déduire que, si F est un sous-espace vectoriel complet de E, $E = F \oplus F^{\perp}$.

Copyrighted material

Hidden page

Ex. 15

Soit E un $\mathbb{R}$-ev normé tel que $\forall (x, y) \in E^2$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Soit $f : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

1) Montrer que $\forall (x, y, z) \in E^3$,

$$f(x+y, z) + f(x-y, z) = 2f(x, z)$$

puis que $\forall (x, z) \in E^2$, $f(2x, z) = 2f(x, z)$ et que

$$\forall (u, v, z) \in E^3, f(u, z) + f(v, z) = f(u+v, z).$$

2) Montrer que f est un produit scalaire sur E.

Ex. 16

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire euclidien sur E.

On notera $\varphi(A, B) = \langle A \mid B \rangle$.

2) a) Montrer que :

$$\forall A \in E, \quad \mathrm{Tr}\, A \leqslant \sqrt{n\,\mathrm{Tr}({}^tAA)}.$$

b) Étudier les cas d'égalité.

3) a) Montrer que :

$$\forall (A, B) \in E^2, \quad \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|.$$

b) Étudier les cas d'égalité.

Indications

Ex. 7

f est antisymétrique si et seulement si elle est alternée. Considérer la forme quadratique q de E associée à f : $\forall x \in E$, $q(x) = f(x, x)$ et remarquer que f est alternée si et seulement si q est nulle.

Ex. 8

Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$,

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Exprimer $q(x')$ en fonction de $q(x)$, $q(e_n)$ et $\varphi(x, e_n)$ où φ est la forme polaire de q.

Ex. 9

1) Considérer $\Phi : aX^2 + bX + c \mapsto b^2 - 4ac$.

2) Considérer les distances de A aux droites engendrées par les polynômes de discriminant positif.

Ex. 10

Utiliser la définition de $d(a, F)$ pour construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de F telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$d^2(a, F) \leqslant \|x_n - a\|^2 \leqslant \frac{1}{n^2} + d^2(a, F)$$

et prouver que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy, en pensant au théorème de la médiane (ou identité du parallélogramme).

Ex. 11

1) b) Le produit :

$$P_n(x)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_p)$$

est de signe constant sur $[-1, 1]$.

2) Utiliser la base $((X-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$.

3) $(X+1)^n$ divise Q si -1 est racine des polynômes $Q, Q', \ldots, Q^{(n-1)}$.

Ex. 12

3) Pour $y \in H^\perp$, $G(y, x_1, \ldots, x_n)$ s'écrit avec un bloc qui est $G(x_1, c \ldots, x_n)$.

Ex. 13

2) a) $q(f(e_4)) = q(e_4)$.

b) On déduit de a) que $G \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. $(G, \circ)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

Ex. 14

3) Faire apparaître la distance de la fonction exp à V. Dans le raisonnement, il faut faire attention au fait que le sous-espace directeur de V n'est pas de dimension finie.

Ex. 15

1) Justifier que $f(0, z) = 0$.

2) Montrer que $f(rx, y) = rf(x, y)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. On utilisera un argument de continuité pour étendre cette relation au cas où $r \in \mathbb{R}$.

Ex. 16

1) Voir *Mise en œuvre*, Exercice 2.

2) a) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

b) Cas d'égalité du théorème de Cauchy-Schwarz.

3) Utiliser l'espace $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique pour majorer le terme général du produit AB.

Copyrighted material

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

▪ Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$. Montrons que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Par hypothèse, on a $\forall y \in E,\ \exists z \in E,\ y = f(z)$, donc :

$$\forall y \in E, \varphi\big(f(\lambda x), y\big) = \varphi\big(f(\lambda x), f(z)\big) = \varphi(\lambda x, z) = \lambda\, \varphi\,(x, z).$$

Or, on a aussi $\varphi\big(f(x), y\big) = \varphi\big(f(x), f(z)\big) = \varphi(x, z)$, d'où :

$$\forall y \in E,\ \varphi\big(f(\lambda x), y\big) = \lambda\, \varphi\,\big(f(x), y\big) \quad \text{soit} \quad \forall y \in E,\ \varphi\big(f(\lambda x) - \lambda f(x), y\big) = 0.$$

φ étant non dégénérée, son noyau est nul et on en conclut que : $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

▪ Soit $\left(x, x'\right) \in E^2$, on a, avec les mêmes notations que ci-dessus :

$$\begin{aligned}\forall y \in E,\ \varphi\big(f\left(x + x'\right), y\big) &= \varphi\big(f\left(x + x'\right), f(z)\big) = \varphi\left(x + x', z\right)\\ &= \varphi(x, z) + \varphi\left(x', z\right)\\ &= \varphi\big(f(x), y\big) + \varphi\big(f\left(x'\right), y\big)\end{aligned}$$

donc $\forall y \in E,\ \varphi\big(f\left(x + x'\right) - f(x) - f\left(x'\right), y\big) = 0$, et φ étant non dégénérée, il vient : $f\left(x + x'\right) = f(x) + f\left(x'\right)$.

f est donc un endomorphisme surjectif de E et puisque E est de dimension finie, c'est un automorphisme.

Remarque

L'injectivité peut se prouver directement très facilement. En effet, soit $x \in \operatorname{Ker} f$, on a :

$$\forall y \in E,\ \varphi(x, y) = \varphi\big(0_E, f(y)\big) = 0, \quad \text{donc } x = 0_E \text{ et } f \text{ est injective.}$$

Ex. 2

q se développe $q(x) = (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$, on en déduit la matrice de q sur la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} n-1 & & & \\ & \ddots & (-1) & \\ & (-1) & \ddots & \\ & & & n-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

▪ De façon immédiate, la somme de toutes les lignes est nulle, d'où : $\operatorname{rg} q \leqslant n-1$.

▪ Calculons alors le déterminant d'ordre $n-1$ (par des manipulations immédiates sur les lignes) :

$$A = \begin{vmatrix} n-1 & & & \\ & \ddots & (-1) & \\ & (-1) & \ddots & \\ & & & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ & n-1 & & & \\ & & \ddots & (-1) & \\ & & (-1) & \ddots & \\ & & & & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$$

donc : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} q = n-1$.

Copyrighted material

Hidden page

2) L'étude des variations de φ montre que l'égalité est réalisée si et seulement si $s = 1$ ou $s = -1$ c'est-à-dire $(a, b, c) \in \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ où $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont deux cercles symétriques par rapport à O.

$$\mathscr{C}_1 \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \qquad \mathscr{C}_2 \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + b + c = -1 \end{cases}$$

$\mathscr{C}_1$ est le cercle du plan $P(a + b + c = 1)$ centré en $A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et de rayon $R = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ex. 6

Le système $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ est de rang 2 (H est bien un plan) et équivaut à : $\begin{cases} x_3 = -x_2 \\ x_4 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$

Une base de H est donc (u_1, u_2) avec $u_1 = (1, 0, 0, 1)$. $u_2 = (0, 1, -1, 2)$.

La méthode de Schmidt fournit une base orthonormale de H : (v_1, v_2) avec

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1) \ , \quad v_2 = \frac{u_2 - \langle u_2 \mid v_1 \rangle v_1}{\|u_2 - \langle u_2 \mid v_1 \rangle v_1\|} = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1).$$

Soit p la projection orthogonale sur H, pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, on a :

$$p(x) = \langle v_1 \mid x \rangle v_1 + \langle v_2 \mid x \rangle v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_4)v_1 + \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 - x_3 + x_4)v_2 .$$

Avec $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$, la formule précédente permet de calculer $p(e_i)$, $i \in [\![1, 4]\!]$, ce qui donne les colonnes de $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} p$. On obtient :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} p = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si s désigne la symétrie orthogonale par rapport à H, on a $s = 2p - \mathrm{Id}$ donc :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Niveau 2

Ex. 7

Soit $f \in \mathscr{L}_2(E)$ vérifiant **(1)** et non alternée. Il existe donc $a \in E$ tel que $q(a) \neq 0$ où q est la forme quadratique définie sur E par : $\forall x \in E, \ q(x) = f(x, x)$.

1) Montrons que $\forall x \in E, \ f(x, a) = f(a, x)$. **(2)**

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(a, x + \lambda a) = f(a, x) + \lambda q(a)$, donc puisque $q(a) \neq 0$, avec $\lambda = -\frac{f(a, x)}{q(a)}$, on a :

$$f(a, x + \lambda a) = 0$$

d'où, d'après **(1)**, $f(a, x + \lambda a) = f(x + \lambda a, a) = 0$. Il en résulte :

$$f(a, x) + \lambda q(a) = f(x, a) + \lambda q(a) \text{ donc } f(a, x) = f(x, a).$$

2) Montrons que $\forall (x, y) \in E^2, \ f(x, y) = f(y, x)$ **(3)**

- Si $f(x, a) \neq 0$, en posant $\lambda = -\frac{f(x, y)}{f(x, a)}$, on a $f(x, y + \lambda a) = 0$ et alors :

$$f(x, y + \lambda a) = f(y + \lambda a, x) = 0 \text{ donc } f(x, y) + \lambda f(x, a) = f(y, x) + \lambda f(a, x)$$

et, d'après **(2)** : $f(x, y) = f(y, x)$.

Copyrighted material

Puisque x et y jouent des rôles symétriques dans **(3)**, le résultat reste valable si $f(y, a) \neq 0$.

• Si $f(x, a) = f(y, a) = 0$, on a pour tout λ réel, $f(x + a, y + \lambda a) = f(x, y) + \lambda q(a)$, donc avec $\lambda = -\dfrac{f(x, y)}{q(a)}$, il vient : $f(x + a, y + \lambda a) = 0$. Et d'après **(1)** :

$$f(x + a, y + \lambda a) = f(y + \lambda a, x + a).$$

Il en résulte $f(x, y) + \lambda q(a) = f(y, x) + \lambda q(a)$ et enfin $f(x, y) = f(y, x)$.

Ex. 8

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. $q(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$.

Posons $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$: $q'(x') = a_{nn}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_ix_j - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} x_ix_ja_{ni}a_{nj}$ **(1)**

On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j - 2x_n\sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j + a_{nn}x_n^2$ et :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} x_ix_ja_{ni}a_{nj} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{ni}x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i - a_{nn}x_n\right)^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i\right)^2 - 2a_{nn}x_n\sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i + a_{nn}^2x_n^2$$

D'où, en reportant dans **(1)** : $q'(x') = a_{nn}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j - \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i\right)^2$ ou encore, en notant $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et φ la forme polaire de q :

$$q'(x') = q(e_n)q(x) - \left[\varphi(x, e_n)\right]^2.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à la forme quadratique q positive, on en conclut que q' est positive.

D'autre part, $q'(x') = 0$ s'écrit : $\varphi(x, e_n)^2 = q(e_n)q(x)$; or, q étant définie-positive, l'inégalité de Cauchy-Schwarz se réduit à une égalité si et seulement si les vecteurs sont liés, donc $x = \lambda e_n$ et $x' = 0$. Finalement q' est définie-positive.

Ex. 9

1) $\mathscr{C}$ est l'ensemble des polynômes $P = aX^2 + bX + c$ tels que $b^2 - 4ac \geqslant 0$, c'est donc un cône car il est stable par toute homothétie $P \mapsto \lambda P$, et on a $\mathscr{C} = \Phi^{-1}(\mathbb{R}_+)$ où Φ est l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par Φ :

$$aX^2 + bX + c \mapsto b^2 - 4ac.$$

La fonction $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (a, b, c) \mapsto b^2 - 4ac$ est continue (c'est une fonction polynôme) donc Φ est continue en tant que composée de fonctions continues :

$$\pi : E \to \mathbb{R}^3, aX^2 + bX + c \mapsto (a, b, c) \text{ et } \varphi.$$

En conséquence, $\mathscr{C}$ est un fermé de E en tant qu'image réciproque par la fonction continue Φ de $\mathbb{R}_+$ fermé de $\mathbb{R}$. (Voir Analyse MP, chapitre 1.)

2) Le cône $\mathscr{C}$ est la réunion des droites vectorielles $D_P = \mathbb{R}P$ avec $P = aX^2 + bX + c$ tel que $b^2 - 4ac \geqslant 0$ (ce sont les génératrices). De plus, quitte à remplacer P par un polynôme proportionnel, on peut se limiter à :

$$\|P\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad \text{et} \quad a \geqslant 0.$$

En conséquence $d(A, \mathscr{C}) = \inf\{d(P) / P = aX^2 + bX + c, a^2 + b^2 + c^2 = 1, a \geqslant 0, b^2 - 4ac \geqslant 0\}$ où l'on a noté $d(P)$ la distance de A à la droite D_P.

Copyrighted material

On sait que $d(P)^2 = \| A - p_P(A) \|^2 = \| A \|^2 - \dfrac{\langle A \mid P \rangle^2}{\| P \|^2}$ ($p_P(A)$ est le projeté orthogonal de A sur la droite D_P : $p_P(A) = \dfrac{\langle A \mid P \rangle}{\| P \|^2} P$), donc $d(P)^2 = 2 - (a+c)^2$ et :

$$d(A, \mathscr{C})^2 = \inf \left\{ 2 - (a+c)^2 \,/\, a^2 + b^2 + c^2 = 1, a \geqslant 0, b^2 - 4ac \geqslant 0 \right\}.$$

De $b^2 - 4ac \geqslant 0$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, on déduit :

$$2ac \leqslant \frac{1 - (a^2 + c^2)}{2} \quad \text{d'où} \quad (a+c)^2 \leqslant \frac{1 + a^2 + c^2}{2}.$$

Avec $a^2 + c^2 = 1 - b^2 \leqslant 1$, il vient alors $(a+c)^2 \leqslant 1$ et enfin $2 - (a+c)^2 \geqslant 1$, donc $d(A, \mathscr{C}) \geqslant 1$.

Il suffit de constater que pour $P = 1$, on a $P \in \mathscr{C}$ et $d(P) = 1$, pour conclure à $d(A, \mathscr{C}) = 1$.

On peut vérifier que, pour $P \in \mathscr{C}$ tel que $\| P \| = 1$ et $a \geqslant 0$, on a $d(P) = 1$ c'est-à-dire $2 - (a+c)^2 = 1$ si et seulement si $P = X^2$ ou $P = 1$ ou -1, ce qui définit deux génératrices du cône $\mathscr{C}$.

En effet, les conditions $\| P \| = 1$ et $d(P) = 1$ s'écrivent $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $a^2 + 2ac + c^2 = 1$, ce qui donne $b^2 - 2ac$ donc $ac \geqslant 0$ et, avec $b^2 - 4ac \geqslant 0$, on en déduit $ac \leqslant 0$ d'où finalement $ac = 0$.

Pour $a = 0$, on obtient $b = 0$ donc $c = \pm 1$, c'est-à-dire $P = 1$ ou $P = -1$.

Pour $c = 0$, on obtient $b = 0$ donc $a = 1$, c'est-à-dire $P = X^2$.

Les projections de A sur ces deux génératrices sont :

$$P_1 = \frac{\langle A \mid X^2 \rangle}{\| X^2 \|^2} X^2 = X^2 \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{\langle A \mid 1 \rangle}{\| 1 \|^2} 1 = 1$$

ce sont les «points» de $\mathscr{C}$ en lesquels la distance $d(A, \mathscr{C})$ est atteinte.

Ex. 10

1) a) L'ensemble $\left\{ x \in F \,/\, d(a, F) = \| x - a \| \right\}$ a au plus un élément : voir démonstration du théorème 23, proposition a).

b) Il reste donc à prouver l'existence de $b \in F$ tel que $d(a, F) = \| b - a \|$.

$d^2(a, F)$ est le plus grand minorant de $\left\{ \| x - a \|^2 \,/\, x \in F \right\}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in F$ tel que :

$$d^2(a, F) \leqslant \| x_n - a \|^2 < \frac{1}{n^2} + d^2(a, F). \qquad \textbf{(1)}$$

Le théorème de la médiane donne :

$$\| x_n - a \|^2 + \| x_p - a \|^2 = 2 \left\| a - \frac{x_n + x_p}{2} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{x_n - x_p}{2} \right\|^2.$$

Puisque $\dfrac{x_n + x_p}{2} \in F$ (convexité), on a $\left\| a - \dfrac{x_n + x_p}{2} \right\|^2 \geqslant d^2(a, F)$ et il vient :

$$\left\| \frac{x_n - x_p}{2} \right\|^2 \leqslant \frac{1}{2} \left[\| x_n - a \|^2 + \| x_p - a \|^2 \right] - d^2(a, F)$$

donc $\dfrac{1}{4} \| x_n - x_p \|^2 \leqslant \dfrac{1}{2} \left[d^2(a, F) + \dfrac{1}{n^2} + d^2(a, F) + \dfrac{1}{p^2} \right] - d^2(a, F)$ et enfin :

$$\| x_n - x_p \|^2 \leqslant 2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \right).$$

En conséquence, $\sup\limits_{p \in [\![n, +\infty [\![} \| x_n - x_p \| \leqslant \dfrac{2}{n}$ et la suite $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy (voir Analyse MP, chapitre 1).

F étant complet, cette suite converge vers $b \in F$ et par continuité de la norme, on a : $\| b - a \| = \lim\limits_{n \to +\infty} \| x_n - a \|$ donc, d'après l'inégalité **(1)** : $\| b - a \| = d(a, F)$.

2) D'après le théorème 23, $\| b - a \| = d(a, F)$ donne $b - a \in F^\perp$.

En écrivant, pour tout a de E, $a = a - b + b$ avec $a - b \in F^\perp$ et $b \in F$, on prouve ainsi que $E = F + F^\perp$ donc $E = F \oplus F^\perp$ (car on sait que $F \cap F^\perp = \{0\}$ est toujours vrai).

Copyrighted material

Ex. 11

1) a) Les conditions **(1)** et **(2)** sont équivalentes à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ est un système orthogonal}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{Vect}\left(1, X, X^2, \dots, X^n\right) = \text{Vect}\left(P_0, P_1, \dots, P_n\right)$$

donc $\left(P_N\right)_{n\in\mathbb{N}}$ se déduit de $\left(X^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

On sait que chaque polynôme P_n est défini à un coefficient de proportionnalité près. Une solution est fournie par :

$$P_0 = 1 \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ , \ P_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n \mid P_k \rangle}{\langle P_k \mid P_k \rangle} P_k.$$

b) Pour $n \geqslant 1$, on a $\langle P_n \mid P_0 \rangle = 0$ c'est-à-dire $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

La fonction P_n est continue sur $[-1, 1]$, si elle ne s'annulait pas en changeant de signe sur $]-1, 1[$, elle resterait de signe constant sur $[-1, 1]$.

Dans ces conditions, $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ exige $\forall x \in [-1, 1]$, $P_n(x) = 0$, ce qui est impossible puisqu'un polynôme de degré n a au plus n racines réelles.

En conséquence, P_n s'annule au moins une fois en changeant de signe sur $]-1, 1[$.

Soit alors $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les racines réelles distinctes de P_n, appartenant à $]-1, 1[$, en lesquelles P_n change de signe.

Puisque $\deg P_n = n$, on a $p \leqslant n$. Avec $p < n$, le polynôme $Q = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_p)$ appartiendrait à $\text{Vect}\left(P_0, P_1, \dots, P_n\right)$ et serait donc orthogonal à P_n.

On aurait ainsi $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)Q(x)\,\mathrm{d}x = 0$ avec une fonction P_nQ continue et de signe constant (les changements de signe de P_n et Q étant simultanés, le produit ne change pas de signe), ce qui exige $\forall x \in [-1, 1]$. $P_n(x)Q(x) = 0$ donc $\forall x \in [-1, 1]$. $P_n(x) = 0$. C'est encore une impossibilité.

En conséquence, on a $p = n$, c'est-à-dire que P_n a exactement n racines réelles simples et situées sur l'intervalle $]-1, 1[$.

c) Une suite $\left(L_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant **(1)** et **(2)** est de la forme :

$$ig(\lambda_n P_n\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ où } \forall n \in \mathbb{N}, \ \lambda_n \in \mathbb{R}^*.$$

D'après le b), on a $P_n(1) \neq 0$ donc la condition **(3)** est réalisée si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \dfrac{1}{P_n(1)}$ d'où l'existence et l'unicité de $\left(L_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant **(1)**, **(2)** et **(3)**.

2) $\left((X-1)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant 2n}$ est une base de $\mathbb{R}_{2n}[X]$, tout polynôme Q de degré $2n$ et tel que $(X-1)^n$ divise Q s'écrit de manière unique :

$$Q = \sum_{k=n}^{2n} q_k (X-1)^k \quad \text{avec} \quad q_{2n} \neq 0$$

et on a alors :

$$Q^{(n)} = \sum_{k=n}^{2n} k(k-1)\cdots(k-n+1)\, q_k (X-1)^{k-n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+n)!}{k!}\, q_{k+n} (X-1)^k$$

De même L_n s'écrit de manière unique : $\displaystyle L_n = \sum_{k=0}^{n} \ell_{n,k} (X-1)^k$

donc $Q^{(n)} = L_n$ équivaut à $\forall k \in [\![0, n]\!]$. $\dfrac{(k+n)!}{k!}\, q_{k+n} = \ell_{n,k}$.

Copyrighted material

Hidden page

2) a) On passe de $G(x_1, \cdots, x_n)$ à $G(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$ en effectuant la permutation σ sur les lignes puis sur les colonnes (ou inversement), donc $\varepsilon(\sigma)$ étant la signature de σ :

$$DG(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)^2 DG(x_1, \cdots, x_n)$$
$$= DG(x_1, \cdots, x_n)$$

b) D'après le a), on peut se limiter au cas où cette opération est effectuée sur le vecteur x_n ; on remplace donc x_n par $x'_n = x_n + y_n$ avec $y_n = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_j$.

On constate alors que la matrice $G(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n + y_n)$ se déduit de $G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ par application de deux transformations élémentaires successives (permutables) :

(1) ajouter à la colonne C_n la combinaison linéaire $\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j C_j$

(2) ajouter à la ligne L_n la combinaison linéaire $\sum_{j=1}^{n-1} \overline{\lambda}_j L_j$

L'égalité des deux déterminants en résulte.

c) $DG(\lambda x_1, x_2, \cdots, x_n) = |\lambda|^2 DG(x_1, \cdots, x_n)$.

3) Posons $y = x - p_H(x)$ donc $x = y + p_H(x)$.

Puisque $p_H(x) \in \text{Vect}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, d'après le **2)** b), on a :

$$DG(y + p_H(x), x_1, x_2, \cdots, x_n) = DG(y, x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Et avec $y \in H^\perp$, on obtient, en écrivant la matrice par blocs :

$$G(y, x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} \|y\|^2 & 0 \\ 0 & G(x_1, \cdots, x_n) \end{bmatrix}.$$

De 1), on déduit $DG(x_1, \cdots, x_n) > 0$, d'où finalement :

$$\|x - p_H(x)\|^2 = \frac{DG(x, x_1, \cdots, x_n)}{DG(x_1, \cdots, x_n)}.$$

Niveau 3

Ex. 13

1) a) Montrons l'équivalence :

$$\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),\ \{\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(f(x)) = q(x)\ \textbf{(1)}\} \iff \{\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ B(f(x), f(y)) = B(x, y)\ \textbf{(2)}\}.$$

Supposons $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(f(x)) = q(x)$, alors par identité de polarisation :

$$B[f(x), f(y)] = \frac{1}{2}[q(f(x) + f(y)) - q(f(x)) - q(f(y))]$$
$$= \frac{1}{2}[q(f(x + y)) - q(f(x)) - q(f(y))] \qquad \text{car } f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$
$$= \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)] \qquad \text{par hypothèse}$$
$$= B(x, y)$$

Ce qui démontre l'implication **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**. La réciproque est évidente.

b) On déduit du a) que $G \subset \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ **(3)**.

- En effet, soit $f \in G$ et $x \in \text{Ker}\, f$, on a alors : $\forall y \in \mathbb{R}^n,\ B(x, y) = B(0, f(y)) = 0$, donc $x = 0$ car B étant non dégénérée, son noyau est réduit à $\{0_E\}$. On a ainsi prouvé que f est injective.
- En dimension finie, l'endomorphisme injectif f est bijectif : $f \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$.

On montre : $\forall (f, g) \in G,\ f \circ g \in G$ **(4)**. En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q[(f \circ g)(x)] = q[g(x)] = q(x)$$

Copyrighted material

On montre $\forall f \in G,\ f^{-1} \in G$ **(5)**. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) = q\left[f \circ f^{-1}(x)\right] = q\left[f^{-1}(x)\right]$.

De **(3)**, **(4)** et **(5)**, on déduit que $(G, \circ)$ est un sous groupe de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

c) Déterminant de $f \in G$.

Soit (e_i) une base de $\mathbb{R}^n$, $M = \mathrm{mat}_{(e_i)} q$ et $A = \mathrm{mat}_{(e_i)} f$. Avec $X = \mathrm{mat}_{(e_i)}(x)$, on a $q\big(f(x)\big) = {}^tX\,{}^tAMAX$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ q(x) = q\big(f(x)\big) = {}^tX\,{}^tAMAX.$$

Il en résulte que ${}^tAMA$ est la matrice de $q = q \circ f$ sur la base (e_i) c'est-à-dire ${}^tAMA = M$.

De cette relation, on déduit $(\det M)(\det A)^2 = \det M$, donc $(\det A)^2 = 1$, $(\det M \neq 0)$, ou encore $\det A = \pm 1$.

2) a) En écrivant $q\big(f(e_4)\big) = q(e_4)$ c'est-à-dire $a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{44}^2 = -1$, il vient :

$$a_{44}^2 = 1 + a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{44}^2 \geqslant 1.$$

▪ Calcul de A^{-1}.

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de q sur $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$. On a $f \in G \iff {}^tAJA = J \iff A^{-1} = J\,{}^tAJ$,

d'où :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & -a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & -a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -a_{43} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

b) On a $c_{44} = \sum_{i=1}^{3} a_{4i} b_{i4} + a_{44} b_{44}$, et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{i=1}^{3} a_{4i} b_{i4} \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_{4i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{3} b_{i4}^2}$$

Par ailleurs $q\big(g(e_4)\big) = q(e_4)$ donne $\sum_{i=1}^{3} b_{i4}^2 = -1 + b_{44}^2$.

$q\big(f^{-1}(e_4)\big) = q(e_4)$ donne $\sum_{i=1}^{3} a_{4i}^2 = -1 + a_{44}^2$, d'où :

$$c_{44} \geqslant a_{44} b_{44} - \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_{4i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{3} b_{i4}^2} = a_{44} b_{44} - \sqrt{a_{44}^2 - 1} \sqrt{b_{44}^2 - 1}$$

et :

$$c_{44} \geqslant a_{44} b_{44} - |a_{44} b_{44}|.$$

Dans le cas $a_{44} b_{44} \geqslant 0$, cela donne $c_{44} \geqslant 0$.

Remarque

Il résulte de ce qui précède que le sous-ensemble de G défini par $\{f \mid f \in G,\ a_{44} \geqslant 0\}$ est un sous-groupe de $(G, \circ)$.

Ex. 14

1) La fonction $P : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x - 1$ appartient à V donc, avec $W = \{f \in E \,/\, f(0) = f(1) = 0\}$, on en déduit $V = P + W = \{P + f \,/\, f \in W\}$.

Comme W est clairement un sous-espace vectoriel de E, il apparaît ainsi que V est le sous-espace affine de E, passant par P et de direction W.

2) φ est évidemment une forme bilinéaire symétrique sur E.

Pour tout $f \in E$, on a $\varphi(f,f) = f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ donc φ est positive et, si $f \in E$ est telle que $\varphi(f,f) = 0$, on obtient : $f(0)^2 = 0$ et $\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$.

Copyrighted material

La fonction f'^2 étant continue et positive sur $[0,1]$, la condition $\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$ donne $\forall t \in [0,1], f'(t) = 0$ donc f est constante sur $[0,1]$ et, avec $f(0) = 0$, il vient $f = 0$ (fonction nulle sur $[0,1]$). On a ainsi prouvé que φ est définie-positive. C'est donc un produit scalaire sur E. On notera :

$$\varphi(f,g) = \langle f \mid g \rangle \text{ et } \varphi(f,f) = \|f\|^2.$$

3) Pour tout f de V, une intégration par parties donne :

$$\int_0^1 e^t f(t)\,\mathrm{d}t = \left[e^t f(t)\right]_0^1 1 - \int_0^1 e^t f'(t)\,\mathrm{d}t = e + 1 - \int_0^1 e^t f'(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où :

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_0^1 \left(f'^2(e) - 2e^t f'(t)\right)\mathrm{d}t + 2e + 2 \\ &= \int_0^1 \left(f'(t) - e^t\right)^2 \mathrm{d}t - \frac{e^2}{2} + 2e + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

En posant $g(t) = f(t) - e^t$ on a $g \in E$ avec $g(0) = -2$, donc :

$$\int_0^1 \left(f'(t) - e^t\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^1 g'(t)^2\,\mathrm{d}t = \|g\|^2 - 4$$

et :

$$I(f) = \|g\|^2 - \frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2}.$$

Il est alors clair que l'ensemble $\{I(f) / f \in V\}$ est borné inférieurement et que cette borne est atteinte quand $\|g\|$ est minimum.

En posant $f = P + h$, d'après le 1), f décrit V si et seulement si h décrit le sous-espace vectoriel W, et on a $g = h - (\exp - P)$. Donc la borne inférieure de $\|g\|$ est atteinte en au plus un point h_0 de W et c'est le cas si et seulement si $h_0 - (\exp - P) \in W^\perp$ c'est-à-dire $f_0 - \exp \in W^\perp$ en posant $f_0 = h_0 + P$, (voir le théorème 23).

Remarque

W n'étant évidemment pas de dimension finie, le cours ne nous pemret pas d'affirmer l'existence du projeté orthogonal de $\exp - P$ sur W.

Nous sommes ainsi ramenés à la recherche de $f_0 \in V$ tel que $\langle f_0 - e \mid u \rangle = 0$ pour tout $u \in W$. Pour $u \in W$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f_0 - \exp \mid u \rangle &= u(0)\left(f_0(0) - 1\right) + \int_0^1 u'(t)\left(f_0'(t) - e^t\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 u'(t)\left(f_0'(t) - e^t\right)\mathrm{d}t \quad (\text{car } u(0) = 0) \end{aligned}$$

et en intégrant par parties :

$$\langle f_0 - \exp \mid u \rangle = -\int_0^1 u(t)\left(f_0''(t) - e^t\right)\mathrm{d}t \quad (\text{car } u(0) = u(1) = 0).$$

En conséquence pour avoir $f_0 - \exp \in W^\perp$, il suffit que :

$$\forall t \in [0,1],\ f_0''(t) = e^t$$

c'est-à-dire , compte tenu de $f_0(0) = -1$ et $f_0(1) = 1$:

$$\forall t \in [0,1],\ f_0(t) = e^t + (3 - e)t - 2.$$

Comme on sait que ce problème a au plus une solution, cette fonction f_0 est l'unique élément de V en lequel $\|g\|$ et donc $I(f)$ atteint sa borne inférieure. On a alors :

$$\begin{aligned} \min_{f \in V} I(f) &= \|f_0 - \exp\|^2 - \frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2} \\ &= \int_0^1 \left(f_0'(t) - e^t\right)^2 at - \frac{1}{2}e^2 + 2e + \frac{5}{2} \\ &= \frac{1}{2}e^2 - 4e + \frac{23}{2}. \end{aligned}$$

Copyrighted material

Ex. 15

Une norme vérifie : $\forall x \in E, \| -x \| = \| x \|$, donc f est symétrique.

1) $4\big(f(x+y,z)+f(x-y,z)\big) = \| x+y+z \|^2 - \| x+y-z \|^2 + \| x-y+z \|^2 - \| x-y-z \|^2$.

Or $\| x+y+z \|^2 + \| x-y+z \|^2 = 2\big(\| x+z \|^2 + \| y \|^2\big)$ et $\| x+y-z \|^2 + \| x-y-z \|^2 = 2\big(\| x-z \|^2 + \| y \|^2\big)$ et il s'ensuit $4\big(f(x+y,z)+f(x-y,z)\big) = 2\big(\| x+z \|^2 - \| x-z \|^2\big) = 8f(x,z)$, c'est-à-dire :

$$f(x+y,z)+f(x-y,z) = 2f(x,z).$$

En particulier, on a $f(2x,z)+f(0,z) = 2f(x,z)$. Or $4f(0,z) = \| z \|^2 - \| -z \|^2 = 0$, d'où $f(2x,z) = 2f(x,z)$.

Notons aussi que $\forall (u,z) \in E^2$, $4f(-u,z) = \| -u+z \|^2 - \| -u-z \|^2 = \| u-z \|^2 - \| u+z \|^2 = -4f(u,z)$.

On applique $f(x+y,z)+f(x-y,z) = 2f(x,z)$ à $x = \dfrac{1}{2}(u+v)$ et $y = \dfrac{1}{2}(u-v)$ et il vient :

$$f(u,z)+f(v,z) = 2f\Big(\frac{1}{2}(u+v),z\Big).$$

Il reste à utiliser $2f(x,z) = f(2x,z)$ pour obtenir $f(u,z)+f(v,z) = f(u+v,z)$.

On a ainsi établi que la première application partielle de f c'est-à-dire $f(\cdot,y) \ : \ x \mapsto f(x,y)$ est, quel que soit $y \in E$, un morphisme additif.

2) Avec $f(u,z)+f(v,z) = f(u+v,z)$, on obtient par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(nx,z) = nf(x,z)$.

Avec $f(-u,z) = -f(u,z)$ et $f(0,z) = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(nx,z) = nf(x,z)$.

Ensuite, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f\left(p\dfrac{x}{p},z\right) = pf\left(\dfrac{x}{p},z\right)$ donne $f\left(\dfrac{x}{p},z\right) = \dfrac{1}{p}f(x,z)$.

Enfin, pour tout $r \in \mathcal{Q}$, en écrivant $r = \dfrac{n}{p}$, $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\forall (x,z) \in E^2, \ \ f(rx,z) = nf\left(\frac{x}{p},z\right) = \frac{n}{p}f(x,z) = rf(x,z).$$

Tout réel λ est limite d'une suite (r_n) de rationnels. À partir de $\lim f(r_n x,z) = \lim r_n f(x,z) = \lambda f(x,z)$, la continuité de f par rapport au premier argument permet de conclure que $f(\lambda x,z) = \lambda f(x,z)$ et établir le second volet de la linéarité de la première application partielle de f.

▪ Continuité

E étant un espace vectoriel normé, l'application $x \mapsto \| x \|$ est continue sur E, tandis que $(x,y) \mapsto x+y$ et $(x,y) \mapsto x-y$ sont continues sur E^2. Il en résulte que f est continue sur E^2 (par composition d'applications continues) ce qui assure la continuité sur E de $x \mapsto f(x,z)$.

Avec la symétrie déjà citée, f est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Pour conclure, on forme $4f(x,x) = \| 2x \|^2 + \| 0_E \|^2$, ce qui montre que f est positive.

Avec $\| 0_E \| = 0$, on a $4f(x,x) = \| 2x \|^2$, donc $f(x,x) = 0 \iff 2x = 0_E$, c'est-à-dire $x = 0_E$ et la forme f est définie-positive : c'est un produit scalaire sur E.

Remarque

$\forall (\lambda,x) \in \mathbb{R} \times E$, $\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$, donc $f(x,x) = \| x \|^2$. On a ainsi prouvé que si une norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel vérifie l'identité du parallélogramme, alors il s'agit d'une norme euclidienne.

Ex. 16

1) La bilinéarité de φ résulte clairement de la linéarité de l'application «trace».

D'autre part $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}({}^tM)$ donne $\mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}({}^tBA)$: φ est symétrique.

Avec $A = \big[a_{ij}\big]$ on a ${}^tAA = \big[m_{ij}\big]$, $m_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$ donc : $\varphi(A,A) = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.

Le calcul montre que $\forall A \in E$. $\varphi(A,A) \geqslant 0$, et si $\varphi(A,A) = 0$ on a : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $a_{ij} = 0$ donc $A = 0$.

φ est donc un produit scalaire, la norme euclidienne associée étant définie par : $\forall A \in E$. $\| A \|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$.

Copyrighted material

Les a_{ij} étant les coordonnées de A sur la base canonique $\left(E_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (les E_{ij} sont les matrices élémentaires), on constate que la norme définie par $\|A\|^2 = \mathrm{Tr}\left({}^tAA\right)$ n'est autre que la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (voir *Mise en œuvre*, Exercice 2).

2) a) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne : $\left|\langle I_n \mid A\rangle\right| \leqslant \|I_n\|\|A\|$, donc $|\mathrm{Tr}\,A| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{Tr}({}^tAA)}$

$$\text{et } a\ fortiori \quad \mathrm{Tr}\,A \leqslant \sqrt{n\,\mathrm{Tr}({}^tAA)}$$

b) Si A est telle que $\mathrm{Tr}\,A = \sqrt{n\,\mathrm{Tr}({}^tAA)}$ compte tenu de : $\mathrm{Tr}\,A \leqslant |\mathrm{Tr}\,A| \leqslant \sqrt{n\,\mathrm{Tr}({}^tAA)}$

on a aussi $|\mathrm{Tr}\,A| = \sqrt{n\,\mathrm{Tr}({}^tAA)}$, c'est-à-dire $\left|\langle I_n \mid A\rangle\right| = \|I_n\|\|A\|$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$. (C'est le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz.)

Réciproquement, pour $A = \lambda I_n$ on obtient :

$$\mathrm{Tr}\,A = n\lambda \text{ et } \mathrm{Tr}({}^tAA) = n\lambda^2 \text{ donc } \sqrt{n\,\mathrm{Tr}({}^tAA)} = n|\lambda|.$$

Il y a donc égalité si et seulement si λ est positif ou nul.

En conclusion, $\mathrm{Tr}\,A = \sqrt{n\,\mathrm{Tr}({}^tAA)}$ équivaut à $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

3) a) Posons $A = \left[a_{ij}\right]$, $B = \left[b_{ij}\right]$, $AB = C = \left[c_{ij}\right]$ on a alors : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

En notant $LA_i = \left(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\right) \in \mathbb{R}^n$ le $i^{\text{ème}}$ vecteur ligne de A,

et $CB_j = \left(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}\right) \in \mathbb{R}^n$ le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de B,

dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique, on a : $c_{ij} = \langle LA_i \mid CB_j\rangle$ donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $c_{ij}^2 \leqslant \|LA_i\|^2\|CB_j\|^2$. Il en résulte :

$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \|LA_i\|^2\|CB_j\|^2 \quad \text{donc aussi} \quad \|AB\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|LA_i\|^2 \sum_{j=1}^{n}\|CB_j\|^2.$$

D'autre part $\sum_{i=1}^{n}\|LA_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = \|A\|^2$ et de même $\sum_{j=1}^{n}\|CB_j\|^2 = \|B\|^2$, d'où finalement :

$$\|AB\|^2 \leqslant \|A\|^2\|B\|^2.$$

b) D'après le calcul précédent, on aura $\|AB\|^2 = \|A\|^2\|B\|^2$ si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], \quad c_{ij}^2 = \|LA_i\|^2\|CB_j\|^2$$

c'est-à-dire, d'après l'étude des cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], \quad LA_i \text{ et } CB_j \text{ sont liés.}$$

Lorsque $A = 0$ ou $B = 0$, ces conditions sont évidemment réalisées. Lorsque $A \neq 0$ et $B \neq 0$, si LA_{i_0} est une ligne non nulle de A, chaque colonne CB_j est colinéaire à LA_{i_0} et si CB_{j_0} est une colonne non nulle de B, chaque ligne LA_i est colinéaire à CB_{j_0}.

Dans tous les cas, il existe donc une colonne $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ peut être identifié à $\mathbb{R}^n$) $U \neq 0$ et des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ tels que :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1\,{}^tU \\ \alpha_2\,{}^tU \\ \vdots \\ \alpha_n\,{}^tU \end{pmatrix} \quad , \quad B = \left[\beta_1 U, \beta_2 U, \ldots, \beta_n U\right].$$

Réciproquement pour des couples (A, B) de ce type, on a évidemment $\left(LA_i, CB_j\right)$ lié pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ donc $\|AB\| = \|A\|\,\|B\|$.

Remarques

- Pour $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ on retrouve $A = 0$,
- si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ et $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ les matrices A et B sont de rang 1 avec $\mathrm{Im}\,{}^tA = \mathrm{Im}\,B = \mathrm{Vect}\,U$.

Copyrighted material

CHAPITRE

6

Espaces euclidiens

A. Structure d'espace euclidien 250
1. Bases orthonormales 250
2. Isomorphisme canonique d'un espace euclidien sur son dual 251
3. Orthogonalité – Perpendicularité – Écart angulaire 252

B. Extension aux espaces hermitiens 253

C. Adjoint d'un endomorphisme – Endomorphismes remarquables 254
1. Adjoint d'un endomorphisme 254
2. Le groupe orthogonal d'un espace euclidien 256
3. Matrices orthogonales 260
4. Similitudes 261
5. Endomorphismes symétriques, antisymétriques 262
6. Réduction des formes bilinéaires symétriques 265

D. Espaces euclidiens de dimension 2 ou 3 268
1. Orientation 268
2. Produit mixte 269
3. Produit vectoriel 270
4. Le groupe orthogonal de E_2 272
5. Le groupe orthogonal de E_3 273

Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre 277

Énoncés des exercices 287

Solutions des exercices 291

Copyrighted material

A. Structure d'espace euclidien

Définition 1

Un **espace euclidien** est un espace préhilbertien réel de dimension finie non nulle.

Dans cette section, E désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$

1. Bases orthonormales

L'étude des espaces préhilbertiens réels, dans le cas de la dimension finie, effectuée au Chapitre 5, nous donne les propriétés suivantes.

Propriété 1

Pour tout sous-espace F d'un espace euclidien E, on a : $E = F \oplus F^\perp$, $F^{\perp\perp} = F$.

Propriété 2

Un espace euclidien E admet au moins une base orthonormale. ✎ (1)
Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

✎ (1) Ou orthonormée.

Pour toute base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E, notons : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

et $G_{\mathcal{B}} = \left[\langle e_i \mid e_j \rangle\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété 3

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) $\mathcal{B}$ est orthonormale
(2) $G_{\mathcal{B}} = I_n$
(3) $\forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY$
(4) $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = {}^tXX$.

Propriété 4

Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormale de E : ✎ (2) $\forall x \in E, \ x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle e_i$.

✎ (2) Les coordonnées d'un vecteur sur une base orthonormale sont les produits scalaires de ce vecteur avec les vecteurs de base.

Propriété 5

On munit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$ d'une structure d'espace euclidien en déclarant une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E comme base orthonormale ; le produit scalaire associé est alors donné par : $(x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Pour $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$ sa base canonique, on a la **structure euclidienne canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1 La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est formée des matrices élémentaires E_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$E_{ij} = \left[\delta_{k,i}\,\delta_{\ell,j}\right]_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant \ell \leqslant n}},$$

le produit scalaire et la norme euclidienne canonique sont donc définis respectivement par :
pour toutes matrices $A = \left[a_{ij}\right]$ et $B = \left[b_{ij}\right]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle A \mid B \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}, \quad \|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

c'est-à-dire aussi : $\langle A \mid B \rangle = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right), \quad \|A\|^2 = \mathrm{Tr}\left({}^tAA\right)$. ✎ (3)

✎ (3) Voir chapitre 5, *Mise en œuvre*, Exercice 2.

Copyrighted material

Théorème 1

Procédé d'orthogonalisation de Schmidt

Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base d'un espace euclidien E.

Il existe une unique base orthonormale $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E telle que : ✎ (4)

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_j) \quad \text{et} \quad \langle e_j \mid u_j \rangle \in \mathbb{R}_+^*$$

✎ (4) Ce théorème est un cas particulier des théorèmes 18, 19 et 20 du chapitre 5.

Remarques

1) La construction se fait de manière récurrente : $v_1 = u_1$, $e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$ et, pour $j \geqslant 2$:

$$v_j = u_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle e_k \mid u_j \rangle e_k \quad , \quad e_j = \frac{v_j}{\|v_j\|}$$

2) Pour que les deux bases $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ vérifient :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_j)$$

il faut et il suffit que la matrice P de passage de la base $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ soit triangulaire supérieure, donc aussi que la matrice P^{-1} de passage de la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à la base $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ soit triangulaire supérieure.

3) Les coefficients diagonaux de P^{-1} sont les nombres $\langle e_i \mid u_i \rangle \quad i = 1, 2, \dots, n$.

Exemple

Voir *Mise en œuvre*, exercice 2.

2. Isomorphisme canonique d'un espace euclidien sur son dual

Théorème 2

L'application $I : E \to E^*, x \mapsto \langle \cdot \mid x \rangle$ est un isomorphisme de E sur E^*.

☞ Pour tout x de E, $I(x)$ est l'application $y \mapsto \langle y \mid x \rangle$, donc $I(x) \in E^*$.

- I est linéaire ;
- I est injective car $\langle y \mid x \rangle = 0$, pour tout y, exige $x = 0$.
- La conclusion résulte donc de $\dim E = \dim E^*$.

Remarque

Cet isomorphisme I transforme une base orthonormale en sa base duale.

En effet, si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormale, les formes coordonnées de cette base (c'est-à-dire les éléments de la base duale) sont les applications :

$$e_i^* : x \mapsto \langle x \mid e_i \rangle \quad \text{donc} \quad e_i^* = I(e_i)$$

Corollaire 1

Pour toute forme linéaire θ de E, il existe un unique vecteur a de E tel que :

$$\forall x \in E, \quad \theta(x) = \langle x \mid a \rangle.$$

Ce vecteur est $a = I^{-1}(\theta)$.

Corollaire 2

Un vecteur x de E est entièrement déterminé par ses produits scalaires avec les vecteurs d'une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ quelconque.

Copyrighted material

☞ Cela revient à montrer que pour toute base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E et tout $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\in\mathbb{R}^n$, il existe un unique vecteur x de E vérifiant $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \langle x \mid e_i\rangle = \alpha_i$.

Notons $(e_i^*)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base duale de $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

La condition $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \langle x \mid e_i\rangle = \alpha_i$ se lit $\forall i\in[\![1,n]\!],\ I(x)(e_i) = \alpha_i$ et elle équivaut donc à $I(x) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i^*$. ✎ (5)

D'où l'existence et l'unicité de x avec $x = I^{-1}(\theta)$ où l'on a posé $\theta = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i^*$.

✎ (5) Les coordonnées sur $(e_i^*)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'une forme linéaire f sont les $f(e_i)$, $1\leqslant i\leqslant n$.

3. Orthogonalité – Perpendicularité – Écart angulaire

Définition 2

On dit que des sous-espaces F et G de E euclidien sont **perpendiculaires** si les trois propriétés équivalentes sont vérifiées :

(1) $F^\perp\subset G$ (2) $G^\perp\subset F$ (3) $F^\perp$ et $G^\perp$ sont orthogonaux.

L'inégalité de Schwarz donne $\dfrac{\langle u \mid v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}\in[-1,1]$, ce qui justifie les définitions suivantes.

Définition 3

L'**écart angulaire** de deux vecteurs non nuls u et v de E est le réel

$$\theta(u,v) = \operatorname{Arccos}\frac{\langle u \mid v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}\in[0,\pi].$$

L'écart angulaire de deux droites $\mathcal{D} = \mathbb{R}u$ et $\mathcal{D}' = \mathbb{R}u'$ de E est le réel ✎ (6)

$$\theta(\mathcal{D},\mathcal{D}') = \operatorname{Arccos}\frac{|\langle u \mid u'\rangle|}{\|u\|\cdot\|u'\|}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

✎ (6) $\theta(\mathcal{D},\mathcal{D}') = \theta(u,u')$ si $\theta(u,u')\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
$\theta(\mathcal{D},\mathcal{D}') = \pi-\theta(u,u')$ si $\theta(u,u')\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Définition 4

L'écart angulaire de deux hyperplans $\mathcal{H} = (\mathbb{R}u)^\perp$ et $\mathcal{H}' = (\mathbb{R}u')^\perp$ de E est le réel ✎ (6)

$$\theta(\mathcal{H},\mathcal{H}') = \operatorname{Arccos}\frac{|\langle u \mid u'\rangle|}{\|u\|\cdot\|u'\|}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

L'écart angulaire d'une droite $\mathcal{D} = \mathbb{R}u$ et d'un hyperplan $\mathcal{H} = (\mathbb{R}v)^\perp$ de E est le réel ✎ (7)

$$\theta(\mathcal{D},\mathcal{H}) = \operatorname{Arcsin}\frac{|\langle u \mid v\rangle|}{\|u\|\cdot\|v\|}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

✎ (7) Dans le cas de droites ou hyperplans, l'écart angulaire ne dépend pas du vecteur choisi pour diriger une droite ou l'orthogonal d'un hyperplan.

Exemple 2 Il n'existe pas trois vecteurs d'un espace euclidien E dont les écarts angulaires deux à deux dépassent $\frac{2\pi}{3}$.

Soit trois vecteurs u_1, u_2, u_3, supposés normés, tels que $\langle u_i \mid u_j\rangle < -\frac{1}{2}$, pour $(1\leqslant i<j\leqslant 3)$.

On a alors $\|u_1+u_2+u_3\|^2 = \sum_{i=1}^{3}\|u_i\|^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\langle u_i \mid u_j\rangle < 3 + 2\times 3\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

Ce qui est absurde.

Copyrighted material

B. Extension aux espaces hermitiens

Définition 5

Un **espace hermitien** est un espace préhilbertien complexe de dimension finie non nulle.

Dans cette section, E désigne un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$.

L'étude des espaces préhilbertiens complexes, dans le cas de la dimension finie, effectuée dans le Chapitre **5**, nous donne les propriétés suivantes.

Propriété 6

Pour tout sous-espace F d'un espace hermitien E, on a :

$$E = F \oplus F^{\perp} \quad , \quad F^{\perp\perp} = F.$$

Propriété 7

Un espace hermitien E admet au moins une base orthonormale (ou orthonormée).

Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

Pour toute base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E, nous notons :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad , \quad X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

et $G_{\mathcal{B}} = [\langle e_i \mid e_j \rangle]$ la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété 8

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathcal{B}$ est orthonormale **(2)** $G_{\mathcal{B}} = I_n$

(3) $\forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i = {}^t\overline{X} Y$ **(4)** $\forall x \in E, \| x \|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = {}^t\overline{X} X.$

Propriété 9

Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormale de E :

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle e_i$$

c'est-à-dire que les coordonnées x_i d'un vecteur x sur une base orthonormale sont les produits scalaires $\langle e_i \mid x \rangle$ de ce vecteur avec les vecteurs de base.

Propriété 10

On munit un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$ d'une structure d'espace hermitien en déclarant une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E comme base orthonormale ; le produit scalaire associé est alors donné par :

$$(x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$$

La méthode précédente appliquée à $E = \mathbb{C}^n$ et $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{C}^n$, confère à $\mathbb{C}^n$ une **structure hermitienne** dite **canonique**.

Remarque

La méthode d'orthogonalisation de Schmidt et d'orthonormalisation reste valable dans un espace hermitien (voir chapitre **5**).

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Réciproquement, supposons $\underset{\mathcal{B}}{\text{mat}} f = A$, $\underset{\mathcal{B}}{\text{mat}} g = {}^tA$.

En posant pour tout $(x, y) \in E^2$, $X = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{mat}_{\mathcal{B}}(y)$, on a :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}\big(f(x)\big) = AX \quad \text{et} \quad \text{mat}_{\mathcal{B}}\big(g(y)\big) = {}^tAY$$

donc, la base $\mathcal{B}$ étant orthonormale, il vient : $\big\langle x \,\big|\, g(y)\big\rangle = {}^t\big({}^tAY\big)X = {}^tYAX = \big\langle f(x) \,\big|\, y\big\rangle$, ce qui prouve que $g = f^*$.

Propriété 15

Polynôme caractéristique – Diagonalisation.
Un endomorphisme et son adjoint ont le même polynôme caractéristique ; si l'un est diagonalisable, l'autre l'est aussi.

☞ C'est un corollaire de la propriété précédente.

Propriété 16

Si F est un sous-espace de E stable par $f \in \mathcal{L}(E)$, alors son orthogonal $F^\perp$ est stable par f^*.

☞ Soit $y \in F^\perp$. Pour tout $x \in F$, on a $f(x) \in F$ et donc $\left\langle y \,\middle|\, f(x)\right\rangle = 0$

d'où $\left\langle f^*(y) \,\middle|\, x\right\rangle = 0$, ce qui montre que $f^*(y)$ appartient à $F^\perp$.

Exemple 3 Étant donné $f \in \mathcal{L}(E)$, E espace euclidien, $\text{Ker}(f^* \circ f) = \text{Ker}\, f$ et $\text{Im}(f^* \circ f) = \text{Im}(f^*)$.

1) $\text{Ker}(f^* \circ f) \supset \text{Ker}\, f$ est une relation connue.
Soit $x \in \text{Ker}(f^* \circ f)$.
De $(f^* \circ f)(x) = 0_E$, on déduit $\big\langle (f^* \circ f)(x) \,\big|\, x\big\rangle = 0$, c'est-à-dire $\big\langle f(x) \,\big|\, f(x)\big\rangle = 0$,
soit $\|f(x)\|^2 = 0$ puis $f(x) = 0_E$.
On a donc $\text{Ker}(f^* \circ f) \subset \text{Ker}\, f$ et enfin $\text{Ker}(f^* \circ f) = \text{Ker}\, f$.

2) On a $\text{Im}(f^* \circ f) = \big[\text{Ker}(f^* \circ f)^*\big]^\perp = \big[\text{Ker}(f^* \circ f)\big]^\perp = \big[\text{Ker}\, f\big]^\perp = \text{Im}\, f^*$

Compléments

En échangeant les rôles de f et f^*, avec $\big(f^*\big)^* = f$, il vient :

$$\text{Ker}(f \circ f^*) = \text{Ker}(f^*) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f \circ f^*) = \text{Im}\, f$$

Exemple 4 Soit $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\forall (X, Y) \in E^2$, $\big\langle X \,\big|\, Y\big\rangle = \text{Tr}({}^tXY)$.

Pour A fixée dans E, $\Phi_A : E \to E$, $X \mapsto A{}^tXA$ est un endomorphisme symétrique de E.

Observer que ${}^tX \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, donc le produit ${}^tXY$ existe et appartient à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, ce qui assure que $\text{Tr}({}^tXY)$ a un sens.

On peut vérifier, comme on l'a fait précédemment dans le cas de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que $(X, Y) \mapsto \text{Tr}({}^tXY)$ est le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tX \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ donne $A{}^tX \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ puis $A{}^tXA \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: Φ_A est à valeurs dans E.

La linéarité de Φ_A est claire, donc $\Phi_A \in \mathcal{L}(E)$.

Il faut vérifier $\forall (X, Y) \in E^2$, $\big\langle \Phi_A(X) \,\big|\, Y\big\rangle = \big\langle X \,\big|\, \Phi_A(Y)\big\rangle$.

Formons donc $\big\langle \Phi_A(X) \,\big|\, Y\big\rangle = \text{Tr}\big({}^tAX\,{}^tAY\big)$.

Les propriétés de l'application «trace» donnent alors :

$$\begin{aligned}
\big\langle \Phi_A(X) \,\big|\, Y\big\rangle &= \text{Tr}\big({}^tYA\,{}^tXA\big) && \big(\text{Tr}(M) = \text{Tr}({}^tM)\big)\\
\big\langle \Phi_A(X) \,\big|\, Y\big\rangle &= \text{Tr}\big({}^tXA\,{}^tYA\big) && \big(\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)\big)\\
\big\langle \Phi_A(X) \,\big|\, Y\big\rangle &= \big\langle X \,\big|\, \Phi_A(Y)\big\rangle
\end{aligned}$$

d'où la conclusion.

Copyrighted material

Hidden page

☞ a) Supposons f orthogonal. Étant donné $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, ✎ (16) $\left\langle f(e_i) \middle| f(e_j) \right\rangle = \langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{ij}$ montre que $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormale de E.

✎ (16) Conservation du produit scalaire.

b) Supposons que $f \in \mathcal{L}(E)$ transforme une base orthonormale $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ en une base orthonormale $\big(f(e_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, f est donc un automorphisme de E.

Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. On a $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k)$.

Les bases $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ étant orthonormales, on a :

$$\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \quad \text{et} \quad \| f(x) \|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Ainsi f est linéaire et conserve la norme, c'est donc un automorphisme orthogonal.

Propriété 19

Un endomorphisme f de E est orthogonal si et seulement si sa matrice M dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tMM = I_n$.

☞ La proposition $\forall x \in E, \| f(x) \|^2 = \| x \|^2$ équivaut à :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ {}^t(MX)MX = {}^tXX$$

c'est-à-dire $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ {}^tX\,{}^tMMX = {}^tXX$ ou encore à ${}^tMM = I_n$.

Propriété 20

On rappelle qu'une isométrie de E est une application $g : E \to E$ telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \| g(x) - g(y) \| = \| x - y \|.$$

Une application $g : E \to E$ est une isométrie si et seulement si il existe un couple (t, f) où t est une translation et $f \in \mathcal{O}(E)$ tel que $g = t \circ f$.

✎ (17) Une translation et un automorphisme orthogonal sont des isométries. Il en est donc de même pour leur composée. Seule la réciproque est à prouver.

☞ ✎ (17) Soit g une isométrie et t la translation de vecteur $g(0)$.

Alors, $f = t^{-1} \circ g$ est une isométrie telle que $f(0) = 0$.

Le choix de $y = 0$ dans $\| f(x) - f(y) \| = \| x - y \|$ montre que f conserve la norme.

On en déduit que f conserve le produit scalaire. En effet,

$$\text{pour tout } (x, y) \in E^2, \text{ on a } \ \| f(x) - f(y) \|^2 = \| x - y \|^2$$

c'est-à-dire $\| f(x) \|^2 - 2\langle f(x) \mid f(y) \rangle + \| f(y) \|^2 = \| x \|^2 - 2\langle x \mid y \rangle + \| y \|^2$

et donc $\left\langle f(x) \middle| f(y) \right\rangle = \langle x \mid y \rangle$. Il en résulte enfin que f est linéaire. ✎ (18)

✎ (18) Exemple 4.

Propriété 21

Symétries orthogonales et réflexions

a) Toute symétrie orthogonale, en particulier toute réflexion, est un automorphisme orthogonal de E.

b) Étant donné deux vecteurs a et b unitaires et distincts, il existe une réflexion et une seule les échangeant.

Il s'agit de la réflexion d'hyperplan $H = (b - a)^{\perp}$, on la note $s_{a,b}$.

En posant $u = \dfrac{b - a}{\| b - a \|}$, on a : $\forall x \in E, \ s_{a,b}(x) = x - 2\langle u \mid x \rangle u$.

c) Étant donné deux droites distinctes $\mathbb{R}a$ et $\mathbb{R}b$ où a et b sont des vecteurs unitaires, il existe deux réflexions les échangeant, il s'agit de $s_{a,b}$ et $s_{a,-b}$.

Copyrighted material

☞ a) Voir chapitre 5, Projections et symétries.

b) Si s est une réflexion d'hyperplan H échangeant a et b, on a :

$$s(b-a) = s(b) - s(a) = a - b$$

donc $b - a \in \operatorname{Ker}\left(s + \mathrm{Id}_E\right)$ c'est-à-dire $b - a \in H^\perp$.

Comme $H^\perp$ est une droite et, $b-a$ étant non nul, il vient $H^\perp = \mathbb{R}(b-a)$ donc $H = (b-a)^\perp$.

Réciproquement, considérons la réflexion s d'hyperplan $H = (b-a)^\perp$. ✎ (19)

Avec $\langle b-a \mid b+a \rangle = \|b\|^2 - \|a\|^2 = 0$, il vient que $b + a \in H$.

Sachant que $H = \operatorname{Ker}\left(s - \mathrm{Id}_E\right)$ et $H^\perp = \operatorname{Ker}\left(s + \mathrm{Id}_E\right)$, on a maintenant :

$$s(b+a) = b + a \text{ et } s(b-a) = a - b$$

c'est-à-dire $s(b) + s(a) = b + a$ et $s(b) - s(a) = a - b$ d'où l'on tire :

$$s(a) = b \text{ et } s(b) = a.$$

Enfin, p désignant la projection orthogonale sur $H^\perp$, on sait que $s = \mathrm{Id}_E - 2p$.

Donc, en posant $u = \dfrac{b-a}{\|b-a\|}$, il vient : $\forall x \in E,\ s(x) = x - 2\langle u \mid x \rangle u$.

c) Il suffit de noter que a et b étant unitaires, l'image de a doit être b ou $-b$.

✎ (19) C'est la seule solution possible.

Remarques

- Une symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal.
- En dehors du cas particulier de l'identité, une projection orthogonale n'est pas un automorphisme orthogonal.

Propriété 22

Propriétés des automorphismes orthogonaux

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$.

a) Le spectre de f est inclus dans $\{-1, 1\}$.
Les sous-espaces propres de f, $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$, sont orthogonaux.

b) Le déterminant de f est $+1$ ou -1.

c) Si f est diagonalisable, f est une symétrie orthogonale.

d) Si F est un sous-espace de E stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.

☞ a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$: il existe $x \in E \setminus \{0\}$, $f(x) = \lambda x$ donc $\|x\| = |\lambda| \|x\|$ puis $|\lambda| = 1$.
Si $x \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $y \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$, on a $f(x) = x$ et $f(y) = -y$ donc :

$$\langle x \mid y \rangle = -\langle f(x) \mid f(y) \rangle.$$

Or $\langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$ d'où finalement $\langle x \mid y \rangle = 0$.

b) $(\det f)^2 = 1$ découle du théorème **(4)**.

c) est un corollaire de a).

d) Si F est stable par f alors $F^\perp$ est stable par f^* (propriété **16**).
Or $f^* = f^{-1}$ donc $F^\perp$ est stable par f^{-1} et donc aussi par f.

Notation 1

$\mathcal{SO}(E)$ ✎ (20) est aussi noté $\mathcal{O}^+(E)$. Ses éléments sont les **rotations** de E.
L'ensemble $\mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$ est aussi noté $\mathcal{O}^-(E)$. Ses éléments sont les automorphismes orthogonaux de E, de déterminant -1, encore appelés **antirotation**.

✎ (20) Groupe spécial orthogonal.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

a) [30] $f^* = f$ et $f^* = -f$ donnent $f = 0$ donc $\mathcal{S}(E) \cap \mathcal{A}(E) = \{0\}$.

Tout $f \in \mathcal{L}(E)$ s'écrit $f = s + a$, $s = \frac{1}{2}(f + f^*)$, $a = \frac{1}{2}(f - f^*)$ et on a :

$$s = s^* \ , \ a = -a^* \text{ donc } \mathcal{L}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E).$$

b) [31] L'image de $\mathcal{S}(E)$ (resp. $\mathcal{A}(E)$) par l'application $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}$ est $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$).

c) On sait que $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}n(n+1)$, $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

[30] On vérifie facilement que $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.

[31] Voir la propriété **28**.

Propriété 30

Projections et symétries

Un projecteur p (resp. une symétrie s) de E est orthogonal si et seulement si il est symétrique.

Voir chapitre **5**, propriétés **23** et **24**.

Propriété 31

Propriétés des endomorphismes antisymétriques

a) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on a $f \in \mathcal{A}(E) \iff \forall x \in E, \langle f(x) \mid x \rangle = 0$.

b) Pour $f \in \mathcal{A}(E)$, 0 est la seule valeur propre éventuelle de f.

c) L'image et le noyau de $f \in \mathcal{A}(E)$ sont supplémentaires orthogonaux.

d) Si F est un sous-espace de E stable par $f \in \mathcal{A}(E)$, alors $F^\perp$ est stable par f.

e) Le rang de $f \in \mathcal{A}(E)$ est pair.

f) Si f est antisymétrique, alors $f \circ f$ est symétrique.

a) Si $f \in \mathcal{A}(E)$, $\langle f(x) \mid x \rangle = -\langle f(x) \mid x \rangle$ donc $\langle f(x) \mid x \rangle = 0$.

Si $\forall x \in E, \ \langle f(x) \mid x \rangle = 0$ alors $\forall (x, y) \in E^2, \ \langle f(x+y) \mid x+y \rangle = 0$.

En développant, on obtient $\langle f(x) \mid x \rangle + \langle f(x) \mid y \rangle + \langle f(y) \mid x \rangle + \langle f(y) \mid y \rangle = 0$ d'où :

$$\langle f(x) \mid y \rangle + \langle f(y) \mid x \rangle = 0.$$

b) Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$ et $\langle f(x) \mid x \rangle = 0$ donne :

$$\lambda \| x \|^2 = 0 \quad \text{d'où} \quad \lambda = 0.$$

c) Avec la propriété **12** : $\mathrm{Ker} f^* = (\mathrm{Im} f)^\perp$ ou $\mathrm{Ker} f^* = \mathrm{Ker}(-f) = \mathrm{Ker} f$.

d) [32] F stable par f donne $F^\perp$ stable par $f^* = -f$ donc $F^\perp$ est stable par f.

e) Avec $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$, f induit sur $\mathrm{Im} f$ un automorphisme g antisymétrique.

D'après b), g n'a pas de valeur propre (réelle) donc $\dim \mathrm{Im} f = \deg \chi_g$ est paire. [33]

f) $(f \circ f)^* = f^* \circ f^* = (-f) \circ (-f) = f \circ f$.

[32] Propriété **16**.

[33] Tout polynôme réel de degré impair a une racine réelle.

Propriété 32

Propriétés des endomorphismes symétriques

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$.

a) L'image et le noyau de f sont supplémentaires orthogonaux.

b) Les sous-espaces propres de f sont en somme directe orthogonale.

c) Si F est un sous-espace stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.

a) C'est un corollaire de la propriété **12** avec $f^* = f$.

b) Soit x et y deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes λ et μ :

$$f(x) = \lambda x \quad , \quad f(y) = \lambda y.$$

L'égalité $\langle f(x) \mid y \rangle = \langle x \mid f(y) \rangle$ donne $\lambda \langle x \mid y \rangle = \mu \langle x \mid y \rangle$, puis $\langle x \mid y \rangle = 0$. [34]

Les sous-espaces propres sont donc deux à deux orthogonaux.

c) C'est un corollaire de la propriété **16** avec $f^* = f$.

[34] Car $\lambda \neq \mu$.

Copyrighted material

Propriété 33

Le polynôme caractéristique χ_f d'un endomorphisme symétrique $f \in \mathcal{S}(E)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

☞ Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f$.
Le polynôme caractéristique χ_M de M est scindé sur $\mathbb{C}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de χ_M et $X = \left[x_j\right] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $MX = \lambda X$.
Avec $\overline{X} = \left[\overline{x_j}\right]$, on en déduit ${}^t\overline{X}MX = \lambda\, {}^t\overline{X}X$, puis ✎ (35) ${}^t\overline{X}\,{}^t\overline{M}X = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}X$.
M étant symétrique réelle, on a ${}^t\overline{M} = M$ d'où $\lambda\, {}^t\overline{X}X = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}X$ et puisque :

$$ {}^t\overline{X}X = \sum_{j=1}^{n} \left|x_j\right|^2 $$

est non nul, il vient finalement $\lambda = \overline{\lambda}$, ce qui prouve que la valeur propre λ est réelle et que χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$.

✎ (35) En conjuguant et en transposant.

Théorème 6

Tout endomorphisme symétrique f d'un espace euclidien E est diagonalisable.
Plus précisement, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de F.

☞ La propriété est évidente si $\dim E = 1$, supposons-la vraie dans tout espace euclidien de dimension $\leqslant n-1$. ✎ (36)
Soit maintenant E espace euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{S}(E)$.
La propriété 33 montre que f admet au moins un vecteur propre e_1, supposé normé.
L'orthogonal F de e_1 est stable par f ✎ (37) qui induit donc sur F un endomorphisme symétrique g.
✎ (38) Puisque $\dim F = n-1$, il existe une base orthonormale $(e_2, \ldots, e_n)$ de F formée de vecteurs propres de g, donc de f. On vérifie alors que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f, ce qui achève la preuve de l'héridité.

✎ (36) Raisonnement par récurrence sur la dimension de E.

✎ (37) Propriété 26-c).

✎ (38) Hypothèse de récurrence.

Remarque

f étant diagonalisable, pour toute valeur propre λ d'ordre de multiplicité m, la dimension du sous-espace propre correspondant $\mathrm{Ker}\left(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E\right)$ est égale à m.

Théorème 7

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique :
- son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}[X]$,
- il existe une matrice P orthogonale, $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

C'est la traduction matricielle de la propriété **33** et du théorème **6**.

Exemple 8 Soit a un vecteur unitaire d'un espace euclidien E, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq -1$, et $u \in \mathcal{S}(E)$ défini par $\forall x \in E,\ u(x) = k\langle x | a \mid a\rangle + x$. Détermination de $k \in \mathbb{R}$ tel que $u \in \mathcal{O}(E)$.

1) Soit p_a la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}a$, on sait que p_a est définie par :

$$ p_a \ :\ x \mapsto \langle x \mid a\rangle a. $$

On a donc $u = kp_a + \mathrm{Id}_E$, or p_a et Id_E sont des endomorphismes symétriques de E donc $u \in \mathcal{S}(E)$.

2) Dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dont le premier vecteur est a, on a :

$$ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, p_a = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & (0) \\ & & \ddots & \\ & (0) & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} 1+k & & & \\ & 1 & & (0) \\ & & \ddots & \\ & (0) & & 1 \end{pmatrix} $$

Pour $k \neq 0$, u a deux valeurs propres distinctes : $1+k$ et 1, et les sous-espaces propres associés sont $\mathbb{R}a$ et $(\mathbb{R}a)^{\perp}$.
Pour $k = 0$ on a $u = \mathrm{Id}_E$.

Copyrighted material

3) u est orthogonal si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} u$ est orthogonale, donc si et seulement si $(1+k)^2 = 1$ c'est-à-dire $k = 0$ ou $k = -2$.
Pour $k = 0$, $u = \mathrm{Id}_E$.
Pour $k = -2$, u est la réflexion d'hyperplan $H = (\mathbb{R}a)^\perp$.

Exemple 9 À toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on associe l'endomorphisme f_σ de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right).$$

Étudier de la signature de σ à l'aide de f_σ.

✎ (39) $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

f_σ est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ (il conserve la norme). ✎ (39)
La matrice de f_σ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ est la matrice de permutation :

$$P_\sigma = \left[\delta_{i\sigma(j)}\right] \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

Cette matrice est orthogonale, donc $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}} = {}^tP_\sigma$.
L'ensemble $\{P_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{S}_n\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
De plus $\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$ donc $P_\sigma \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \iff \sigma$ est paire.

Exemple 10 **Norme d'un endomorphisme symétrique**

Pour $f \in \mathcal{S}(E)$, $\|f\| = \sup_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda_i|$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ désignent les valeurs propres de f.

Soit $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f.

Pour $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, on a $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j e_j$, et :

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 x_j^2 \leqslant \mu^2 \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right) \quad \text{où} \quad \mu = \sup_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda_i|.$$

Ainsi $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \mu \|x\|$ avec égalité pour $x = e_k$ tel que $\mu = |\lambda_k|$ d'où $\|f\| = \mu$.

6. Réduction des formes bilinéaires symétriques

6.1 – Formes bilinéaires symétriques sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E

L'ensemble des formes bilinéaires sur E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel noté $\mathcal{L}_2(E)$, dont le sous-ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E est un sous-espace vectoriel, noté $\mathcal{S}_2(E)$.
On suppose que E est de dimension finie : $\dim E = n \geqslant 1$.

Développement sur une base

E est rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et pour tout $(x, y) \in E$, on pose :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ , \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \ , \quad X = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(x) \ , \quad Y = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(y)$$

Soit enfin φ une forme bilinéaire symétrique sur E : $\varphi \in \mathcal{S}_2(E)$.

- En posant pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\varphi(e_i, e_j) = a_{ij}$, on obtient :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \qquad (1)$$

✎ (40) $\varphi(e_i,e_j)=\varphi(e_j,e_i)$.

De plus, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $a_{ij} = a_{ji}$ ✎ (40) et on obtient :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} \left(x_i y_j + x_j y_i\right) \qquad (2)$$

- Enfin, en posant $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il vient :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = {}^tXAY = {}^tYAX \qquad (3)$$

Définition 10

La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de terme général $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$, est appelée matrice de φ sur la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} \varphi$. C'est une matrice symétrique réelle.

Copyrighted material

Propriété 34

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $\mathcal{B}' = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
En notant $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\varphi$, $A' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}\varphi$ on a $A' = {}^tPAP$.

☞ En posant pour tout x de E_n, $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $X' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(x)$, on a $X = PX'$,
donc, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = {}^tXAY = {}^tX'\,{}^tPAPY'$.

Avec ${}^tPAP = \left[b_{ij}\right]$, on en déduit : $\forall (x, y) \in E_n^2$, $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i'y_j'$, donc :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \varphi\left(e_i', e_j'\right) = b_{ij} \text{ et } {}^tPAP = A'.$$

6.2 – Endomorphisme autoadjoint associé à une forme bilinéaire symétrique ✎ (41)

✎ (41) E désigne de nouveau un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

Théorème 8

Pour toute forme bilinéaire symétrique φ sur E : $\varphi \in \mathcal{S}_2(E)$, il existe un unique endomorphisme symétrique f de E, tel que : $\forall (x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \langle f(x) \mid y\rangle$.
On dit que f est l'endomorphisme symétrique ou **autoadjoint** de la forme bilinéaire symétrique φ.
Dans toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, la matrice de f est égale à la matrice de φ.

☞ **Unicité**
Soit $f \in \mathcal{S}(E)$ et $g \in \mathcal{S}(E)$ tels que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \varphi(x, y) = \left\langle f(x) \middle| y\right\rangle \ ,\ \varphi(x, y) = \left\langle g(x) \middle| y\right\rangle$$

Alors $\forall (x, y) \in E^2$, $\left\langle f(x) - g(x) \middle| y\right\rangle = 0$, d'où $\forall x \in E$, $f(x) - g(x) = 0$ puis $f = g$.

Existence
Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormale de E.
Posons $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\varphi$, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i \ ,\ X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) \ ,\ y = \sum_{i=1}^{n} y_ie_i \ ,\ Y = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(y)$$

On a alors $\varphi(x, y) = {}^tXAY = {}^t(AX)Y$ donc $\varphi(x, y) = {}^tZY$ avec $Z = AX$
soit aussi $\varphi(x, y) = \langle z \mid y\rangle$ où $z \in E$ est le vecteur tel que $Z = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(z)$.
On définit $f \in \mathcal{S}(E)$ par $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f = A$, f est autoadjoint car A est symétrique et $\mathcal{B}$ est une base orthonormale.
On a $\forall x \in E$, $z = f(x) \iff Z = AX$ donc : $\forall (x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \left\langle f(x) \middle| y\right\rangle$.

Théorème 9

Réduction des formes bilinéaires symétriques
Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Il existe une base orthonormale $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E telle que

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i, \text{ avec } \lambda_i = \varphi(e_i, e_i),\ x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i \text{ et } y = \sum_{j=1}^{n} y_je_j.$$

☞ Soit f l'endomorphisme symétrique de φ. Il existe $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = \lambda_ie_i$.

En notant $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_je_j$ on obtient alors :

$$\forall (x, y) \in E,\ \varphi(x, y) = \left\langle f(x) \middle| y\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_ie_i \ \middle|\ \sum_{j=1}^{n} y_je_j \right\rangle \text{ donc } \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_iy_i.$$

Copyrighted material

Remarques

1) Dans la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, le développement de $\varphi(x, y)$ ne comprend que des «termes carrés» $x_i y_i$. (42) On dit que la forme φ est **réduite** dans la base $\mathcal{B}$ ou que $\mathcal{B}$ est une **base de réduction** de φ.

(42) Les termes rectangles «$x_i y_j$», $i \neq j$, n'apparaissent pas.

2) $\mathcal{B}$ est une base de réduction de φ si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} \varphi$ est diagonale.

Exemple 11 Sur $E = \mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$, soit φ la forme bilinéaire symétrique sur E définie par : $\forall (x, y) \in E^2$,

$$\varphi(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_4y_4 - \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_1)$$

$$- (x_1y_4 + x_4y_1) - (x_2y_3 + x_3y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_4 + x_4y_2) - \frac{1}{2}(x_3y_4 + x_4y_3)$$

où $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

Former la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$, déterminer une base de réduction de φ et vérifier que φ est un produit scalaire.

1) Matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$.

$A = [a_{ij}]$: a_{ij} est le coefficient de $x_i y_j$ dans le développement de $\varphi(x, y)$ donc :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

2) Pour une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique dans laquelle φ est réduite, on diagonalise la matrice A. Pour cela, calculons son polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(A - XI_4) = X^4 - 8X^3 + 21X^2 - 22X + 8 \\ &= (X - 1)^2(X - 2)(X - 4). \end{aligned}$$

On détermine une base orthonormale de chaque sous-espace propre :

$$\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \quad . \quad u_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4)$$

$$\mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}(u_3) \quad . \quad u_3 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 + e_4)$$

$$\mathrm{Ker}(A - 4I_3) = \mathrm{Vect}(u_4) \quad . \quad u_4 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 + e_4)$$

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{O}_4(\mathbb{R}) \text{ et } P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Sur la base $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$, pour $x = \sum_{i=1}^{4} x'_i u_i$. $y = \sum_{i=1}^{4} y'_i e_i$ on a :

$$\varphi(x, y) = x'_1y'_1 + x'_2y'_2 + 2x'_3y'_3 + 4x'_4y'_4.$$

3) Pour montrer que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^4$, il reste à prouver que φ est définie-positive, ce qui est évident avec :

$$\varphi(x, x) = x'^2_1 + x'^2_2 + 2x'^2_3 + 4x'^2_4.$$

Copyrighted material

Hidden page

Propriété 39

Deux bases (u, v) et (u', v') de P sont de même orientation si et seulement si

$$\det_{(u,v)}(u', v') > 0.$$

Propriété 40

On ne change pas l'orientation de P en remplaçant le vecteur normal w par un vecteur w' positivement colinéaire : $w' = \lambda w$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Produit mixte

(46) L'espace euclidien E_n, $n \in \{2,3\}$, est supposé orienté.

Théorème 10

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormales directes de E_n, on a $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

☞ La matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ appartient à $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, donc $\det P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = 1$.
Compte tenu de $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$, $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \cdot \det_{\mathcal{B}'}$ donne $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

Définition 14

On appelle **produit mixte** sur E_n la forme n-linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ où $\mathcal{B}$ est une base orthonormale directe quelconque. On note $[u_1, \dots, u_n]$ le produit mixte du n-uplet $(u_1, \dots, u_n) \in E_n^n$.

$n = 2$ $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base orthonormale directe,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 \ , \ y = y_1 e_1 + y_2 e_2$$
$$[x, y] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$n = 3$ $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base orthonormale directe,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \ , \ y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 \ , \ z = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3$$
$$[x, y, z] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Propriété 41

Expression du produit mixte

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormale directe de E_n.

$$[u_1, \dots, u_n] = \det \left[\langle e_i \mid u_j \rangle \right]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$$

☞ Dans la base (e_i), les coordonnées de u_j sont les $\langle e_i \mid u_j \rangle$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Propriété 42

Propriétés du produit mixte

a) $(u_1, \dots, u_n)$ lié $\iff [u_1, \dots, u_n] = 0$.

b) $(u_1, \dots, u_n)$ base directe $\iff [u_1, \dots, u_n] > 0$.

c) $\left[u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j u_j, u_{i+1}, \dots, u_n\right] = [u_1, \dots, u_i, \dots, u_n]$.

d) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E_n)$, $[f(u_1), \dots, f(u_n)] = (\det f)[u_1, \dots, u_n]$.

☞ Ces propriétés sont celles des formes n-linéaires alternées.

Copyrighted material

3. Produit vectoriel [47]

[47] On se place dans l'espace euclidien E_3 orienté.

Définition 15

Pour tout couple (u, v) de E_3^2, il existe un unique vecteur w de E_3 tel que :

$$\forall x \in E_3,\ [u, v, x] = \langle w \mid x \rangle.$$

Ce vecteur w est le **produit vectoriel de u et v**. [48] Il est noté $u \wedge v$.

[48] Pris dans cet ordre.

☞ [49] L'application $\varphi : E_3 \to \mathbb{R},\ x \mapsto [u, v, x]$ étant linéaire, le corollaire 1 du théorème 2 donne l'existence et l'unicité de w tel que : $\forall x \in E_3,\ \varphi(x) = \langle w \mid x \rangle$.

[49] L'existence et l'unicité de w provient de l'isomorphisme canonique de l'espace euclidien E_3 sur son dual.

Propriété 43

Quels que soient u, v, w dans E_3 : $[u, v, w] = \langle (u \wedge v) \mid w \rangle = \langle u \mid (v \wedge w) \rangle$.

Propriété 44

Quels que soient u, v dans E_3, $v \wedge u = -u \wedge v$.

L'application $E_3^2 \to E_3,\ (u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire antisymétrique donc alternée.

Propriété 45

$u \wedge v = 0 \iff (u, v)$ est lié.

$u \wedge v \in \left[\mathrm{Vect}(u, v)\right]^\perp$, si (u, v) est libre $\left[\mathrm{Vect}(u, v)\right]^\perp = \mathrm{Vect}(u \wedge v)$.

(u, v) libre $\iff (u, v, u \wedge v)$ est une base directe de E_3.

Propriété 46

Calcul du produit vectoriel dans une base orthonormale directe (e_1, e_2, e_3).

a) On a $e_1 \wedge e_2 = e_3,\ e_2 \wedge e_3 = e_1,\ e_3 \wedge e_1 = e_2$.

b) Pour $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$, on a :

$$u \wedge v = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\, e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\, e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\, e_3.$$

Remarque pratique

Les coordonnées de $u \wedge v$ sont les cofacteurs de z_1, z_2, z_3 dans la matrice $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$.

Propriété 47

Double produit vectoriel

Pour tout triplet $(u, v, w) \in E_3^3$, on a : [50]

$$(u \wedge v) \wedge w = \langle u \mid w \rangle v - \langle v \mid w \rangle u \quad \text{et} \quad u \wedge (v \wedge w) = \langle u \mid w \rangle v - \langle u \mid v \rangle w.$$

[50] On effectue le calcul des coordonnées dans une base orthonormale directe (a,b,c) telle que $u=\alpha a$, $v=\beta a+\gamma b$ et $w=xa+yb+zc$.

Propriété 48

Identité de Lagrange

$$\| u \wedge v \|^2 = \| u \|^2 \cdot \| v \|^2 - \langle u \mid v \rangle^2.$$

☞ On écrit $\| u \wedge v \|^2 = \langle (u \wedge v) \mid (u \wedge v) \rangle = [u, v, (u \wedge v)] = \langle u \mid v \wedge (u \wedge v) \rangle$ et on applique la formule du double produit vectoriel : $v \wedge (u \wedge v) = \| v \|^2 u - \langle u \mid v \rangle v$.

Propriété 49

Norme du produit vectoriel

Si u et v sont deux vecteurs non nuls d'écart angulaire θ, on a : $\| u \wedge v \| = \| u \| \, \| v \| \sin \theta$.

Cas particulier : si u et v sont orthogonaux, $\| u \wedge v \| = \| u \| \, \| v \|$.

Propriété 50

Division vectorielle

Soit (a, b) un couple de vecteurs de E_3, $a \neq 0$, l'équation $x \in E_3,\ a \wedge x = b$ a une solution si et seulement si $\langle a \mid b \rangle = 0$.

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est la droite affine $\dfrac{b \wedge a}{\| a \|^2} + \mathbb{R}a$.

Copyrighted material

☞ a) Conditions nécessaires

Si $x \in E_3$ est solution : $\langle a \wedge x \,|\, a\rangle = \langle b \,|\, a\rangle = 0$.

On a aussi $(a \wedge x) \wedge a = \|a\|^2 x - \langle x \,|\, a\rangle a = b \wedge a$ d'où $x = \dfrac{b \wedge a}{\|a\|^2} + \lambda a, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

b) Condition suffisante

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, avec $x = \dfrac{b \wedge a}{\|a\|^2} + \lambda a$, on a

$$a \wedge x = \frac{1}{\|a\|^2} a \wedge (b \wedge a) + \lambda a \wedge a = \frac{1}{\|a\|^2}\left(\langle a \,|\, a\rangle b - \langle a \,|\, b\rangle a\right)$$

et, avec $\langle a \,|\, b\rangle = 0$, il vient $a \wedge x = b$.

En conclusion, lorsque $\langle a \,|\, b\rangle = 0$, l'ensemble des solutions est $\dfrac{b \wedge a}{\|a\|^2} + \mathbb{R}a$.

Exemple 12 Dans $E = \mathbb{R}^3$ euclidien canonique orienté, résoudre l'équation $x \in E$, $x + a \wedge x = b$, où a et b sont donnés dans E_3.

- L'équation proposée a une solution et une seule. Pour cela, notons que l'équation s'écrit $f(x) = b$ où f est l'application linéaire $x \mapsto x + a \wedge x$.

Soit alors $x \in \operatorname{Ker} f$, on obtient $x = -a \wedge x$ donc :

$$\langle x \,|\, x\rangle = \|x\|^2 = 0 \quad \text{et} \quad x = 0 : f \text{ est injective.}$$

L'espace E étant de dimension finie, l'endomorphisme injectif f est un automorphisme et

$$f(x) = b \quad \text{équivaut à} \quad x = f^{-1}(b).$$

- Soit x la solution de $x + a \wedge x = b$ **(1)**

Multiplions scalairement par a : $\langle a \,|\, x\rangle = \langle a \,|\, b\rangle$ **(2)**,

puis multiplions vectoriellement par a, à gauche : $a \wedge x + a \wedge (a \wedge x) = a \wedge b$

$$\text{donc} \qquad a \wedge x + \langle a \,|\, x\rangle a - \|a\|^2 x = a \wedge b \quad \textbf{(3)}.$$

Avec **(1)** et **(2)**, **(3)** donne $b - x + \langle a \,|\, b\rangle a - \|a\|^2 x = a \wedge b$, donc :

$$x = \frac{b + \langle a \,|\, b\rangle a - a \wedge b}{1 + \|a\|^2}.$$

Exemple 13 Soit a, b, c, d quatre vecteurs de E dont trois d'entre eux ne sont pas coplanaires. En écrivant une combinaison linéaire nulle de ces quatre vecteurs, retrouver les formules de Cramer.

Supposons a, b, c, non coplanaires (ce qui est possible par hypothèse). On a donc $[a, b, c] \neq 0$.

On a $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = \langle a \,|\, c \wedge d\rangle b - \langle b \,|\, c \wedge d\rangle a$, et aussi :

$$(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = \langle a \wedge b \,|\, d\rangle c - \langle a \wedge b \,|\, c\rangle d.$$

On en déduit $[d, b, c]a + [a, d, c]b + [a, b, d]c - [a, b, c]d = 0$.

En écrivant $d = \dfrac{[d, b, c]}{[a, b, c]} a + \dfrac{[a, d, c]}{[a, b, c]} b + \dfrac{[a, b, d]}{[a, b, c]} c$, on retrouve les formules de Cramer.

Produit vectoriel et endomorphisme antisymétrique

Propriété 51

Soit $\omega \in E_3$ et l'application $g_\omega : E_3 \to E_3,\ x \mapsto \omega \wedge x$.

a) g_ω est un endomorphisme antisymétrique de E_3.

b) Si on a $\omega \neq 0$, alors $\operatorname{Ker}(g_\omega) = \mathbb{R}\omega$, $\operatorname{Im}(g_\omega) = \omega^\perp$ et $\operatorname{rg}(g_\omega) = 2$.

✎ (51) Il est immédiat que g_ω est un endomorphisme de E_3.

✎ (52) Théorème du rang

☞ a) ✎ (51) Pour tout $x \in E_3$, on a $\langle g_\omega(x) \,|\, x\rangle = \langle \omega \wedge x \,|\, x\rangle = 0$, donc g_ω est antisymétrique.

b) $g_\omega(x) = 0 \iff \omega \wedge x = 0 \iff (\omega, x)$ est lié, donc $\operatorname{Ker} g_\omega = \mathbb{R}\omega$.

Pour tout $x \in E_3$, on a $g_\omega(x) \in \omega^\perp$ donc $\operatorname{Im} g_\omega \subset \omega^\perp$.

✎ (52) $\operatorname{rg} g_\omega = 3 - \dim \operatorname{Ker} g_\omega = 2$ donne $\dim \operatorname{Im} g_\omega = 2 = \dim \omega^\perp$ et $\operatorname{Im} g_\omega = \omega^\perp$.

Copyrighted material

Propriété 52

Si $\mathcal{B} = (i, j, k)$ est une base orthonormale directe de E_3, en posant $\omega = pi + qj + rk$, on a :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} g_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$$

Propriété 53

Description d'un endomorphisme antisymétrique

Soit $f \in \mathcal{A}(E_3)$. Il existe un unique vecteur $\omega \in E_3$ tel que : $\forall x \in E_3, f(x) = \omega \wedge x$.

☞ $\omega \mapsto g_\omega$ est une application linéaire de E_3 dans $\mathcal{A}(E_3)$.
Si $g_\omega = 0$, on a $\forall x \in E_3, g_\omega(x) = \omega \wedge x = 0$. Lié à tout x de E_3, le vecteur ω est nul.
Ainsi, $\omega \mapsto g_\omega$ est injective, et puisque $\dim \mathcal{A}(E_3) = 3 = \dim E_3$, c'est une application bijective de E_3 sur $\mathcal{A}(E_3)$.

Remarque

Dans une base orthonormale directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$, f est représenté par une matrice antisymétrique : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$ d'où $\omega = pi + qj + rk$.

4. Le groupe orthogonal de E_2

4.1 – Les matrices orthogonales d'ordre 2

Théorème 11

✎ (53) Ensemble des matrices de rotation d'ordre 2.

L'ensemble $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ ✎ (53) est formé des matrices :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Pour $\theta = 0 \pmod{2\pi}$, $R_\theta = I_2$. Pour $\theta = \pi \pmod{2\pi}$, $R_\theta = -I_2$.
Si $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$, R_θ n'a pas de valeur propre (réelle).

Théorème 12

✎ (54) Ensemble des matrices d'antirotation d'ordre 2.

L'ensemble $\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$ ✎ (54) est formé des matrices :

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

S_θ est symétrique avec deux valeurs propres réelles 1 et -1. Elle est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: il existe $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} S_\theta P = {}^t P S_\theta P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4.2 – Automorphismes orthogonaux de E_2

Théorème 13

Pour toute rotation $f \in \mathcal{SO}(E_2)$, il existe un réel θ, unique modulo 2π, tel que dans toute base orthonormale directe $\mathcal{B}$ de E_2, on ait $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f = R_\theta$.
On dit que θ est une mesure de la rotation f ou que f est la **rotation d'angle** θ.

Théorème 14

Pour toute antirotation $g \in \mathcal{O}(E_2) \setminus \mathcal{SO}(E_2)$ et toute base orthonormale $\mathcal{B} = (i, j)$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} g = S_\varphi$.

g est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}u$ avec : $u = \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right) i + \left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) j$. ✎ (55)

✎ (55) Les antirotations de E_2 sont donc les réflexions.

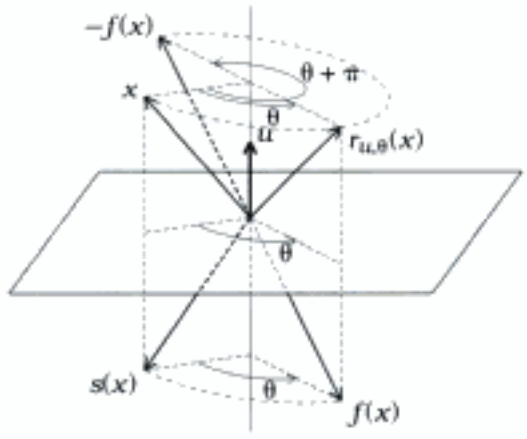
Propriété 54

Toute rotation de E_2 peut se décomposer en produit de réflexion :

$$S_\theta \circ S_{\theta'} = R_{\theta - \theta'}.$$

Copyrighted material

Hidden page



2) Pour $\theta = \pi \pmod{2\pi}$, les formules précédentes donnent $f = -\mathrm{Id}_E$, dans ce cas $\mathrm{Ker}\left(f + \mathrm{Id}_{E_3}\right)$ est l'espace E_3.

Propriété 55

Expression vectorielle d'une rotation $r_{u,\theta}$ [57]

a) $\forall x \in E_3,\ r_{u,\theta}(x) = x\cos\theta + (1-\cos\theta)\langle u \mid x\rangle u + (u \wedge x)\sin\theta$. [58]

b) La partie symétrique de $r_{u,\theta}$ est l'application $x \mapsto x\cos\theta + (1-\cos\theta)\langle u \mid x\rangle u$.
La partie antisymétrique de $r_{u,\theta}$ est $x \mapsto (u \wedge x)\sin\theta$.

[57] u vecteur unitaire.

[58] La vérification de ces formules est immédiate avec la matrice de $r_{u,\theta}$ sur une base orthonormale directe (u,v,w).

Propriété 56

Expression vectorielle d'une antirotation $s \circ r_{u,\theta} = r_{u,\theta} \circ s$

a) $\forall x \in E,\ s \circ r_{u,\theta}(x) = x\cos\theta - (1+\cos\theta)\langle u \mid x\rangle u + (u \wedge x)\sin\theta$.

b) La partie symétrique de $s \circ r_{u,\theta}$ est l'application : $x \mapsto x\cos\theta - (1+\cos\theta)\langle u \mid x\rangle u$.

c) La partie antisymétrique est $x \mapsto (u \wedge x)\sin\theta$.

On vérifie ces formules à partir de $\mathrm{mat}_{(u,v,w)}(s \circ r_{u,\theta})$ ou en utilisant $s \circ r_{u,\theta} = -r_{u,\theta+\pi}$.

5.2 – Étude pratique d'un endomorphisme orthogonal de E_3

L'endomorphisme f est défini par sa matrice A dans une base orthonormale directe (i, j, k).

a) Étudier les vecteurs colonnes C_1, C_2, C_3 pour vérifier que A est orthogonale.
La comparaison des signes d'une coordonnée de $C_1 \wedge C_2$ et de la coordonnée correspondante de C_3 permet de dire si f est une rotation ou une antirotation.

b) Cas particulier : la matrice A est symétrique.
En dehors des cas $f = \mathrm{Id}_{E_3}$ et $f = -\mathrm{Id}_{E_3}$ (qui ne nécessitent pas d'étude particulière), f est un demi-tour ou une réflexion. L'axe du demi-tour ou le plan de la réflexion est le sous-espace des invariants : $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_{E_3}\right)$.

c) Cas d'une rotation non symétrique : $f = r_{u,\theta}$. $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$.

Première méthode

- On cherche u vecteur unitaire dirigeant la droite $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$.
- $\mathrm{Tr}\, f = 1 + 2\cos\theta$ donne $\cos\theta$, d'où la détermination principale de θ, au signe près :

$$\theta = \pm\,\mathrm{Arccos}\left(\frac{\mathrm{Tr}\, f - 1}{2}\right)$$

- Si x n'est pas colinéaire à u, le signe de $\sin\theta$ est celui du produit mixte $[u, x, f(x)]$. Plus précisément, $[u, x, f(x)] = \left(\|x\|^2 - \langle u \mid x\rangle^2\right)\sin\theta = \|u \wedge x\|^2 \sin\theta$.

Pratiquement, il suffit de calculer le produit $[u, x, f(x)]$ avec un vecteur u bien choisi (prendre l'un des vecteurs de base i, j ou k) pour avoir le signe de $\sin\theta$ et achever ainsi la détermination de θ.

Copyrighted material

Deuxième méthode

- On calcule toujours $\theta = \pm \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{\operatorname{Tr} f - 1}{2}\right)$
- La partie antisymétrique d'une rotation f d'axe dirigé par le vecteur unitaire $u(\alpha, \beta, \gamma)$ et d'angle θ est $g = \dfrac{1}{2}(f - f^*) : x \mapsto \sin\theta(u \wedge x)$.

On forme alors $\dfrac{1}{2}(A - {}^tA)$, qui est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$, c'est la matrice de l'endomorphisme $x \mapsto \omega \wedge x$, avec $\omega(p, q, r)$. On en déduit $\omega = (\sin\theta)u$.

On prend donc $u = \dfrac{\omega}{\|\omega\|}$ et $\sin\theta > 0$ ou $u = -\dfrac{\omega}{\|\omega\|}$ et $\sin\theta < 0$. ✎ (59)

✎ (59) **À retenir** : g fournit à la fois un vecteur invariant normé de l'axe de la rotation et le sinus de l'angle (ce vecteur une fois choisi oriente l'axe).

d) Cas d'une **antirotation non symétrique** : $f = s \circ r_{u,\theta}$ $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$.

La relation $-s \circ r_{u,\theta} = r_{u,\theta+\pi}$ ramène au cas précédent.

5.3 – Exemples

E_3 euclidien orienté est rapporté à une base orthonormale directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$.

Exemple 14 Étude des endomorphismes f, g, h de E_3 dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 1 & 3 \\ \sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -1 & 3 \\ -\sqrt{6} & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Pour chaque matrice, le système des vecteurs colonnes (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, ce sont donc des matrices orthogonales.

La comparaison des signes de la première coordonnée de $C_1 \wedge C_2$ et de C_3 donne alors :

$$A \in \mathcal{O}_3^-(\mathbb{R}) \quad , \quad B \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad C \in \mathcal{O}_3^-(\mathbb{R}).$$

- Étude de f : $A = \operatorname{mat}_{(i,j,k)} f$.

$A \in \mathcal{O}_3^-(\mathbb{R})$ étant symétrique et différente de $-I_3$, f est une réflexion (symétrie plan).

Déterminons le sous-espace des invariants : $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{E_3})$.

Le système $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est équivalent à $\sqrt{6}x + 3y - 3z = 0$, donc f est la réflexion de plan P : $\sqrt{6}x + 3y - 3z = 0$.

- Étude de g : $B = \operatorname{mat}_{(i,j,k)} g$.

Déterminons l'axe de rotation : $\operatorname{Ker}(g - \operatorname{Id}_{E_3})$.

Le système $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ équivaut à :

$$\begin{cases} -\sqrt{6}x - y + z = 0 \\ \sqrt{6}x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

L'axe de rotation est donc dirigé par $u = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(j + k)$.

Déterminons maintenant l'angle θ :

$$\operatorname{Tr} B = 0 \text{ donne } 1 + 2\cos\theta = 0 \text{ soit } \cos\theta = -\frac{1}{2}.$$

Calculons le produit mixte $[u, i, g(i)] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc :

$$\sin\theta \text{ est positif et } \theta = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Copyrighted material

- Étude de h : $C = \mathrm{mat}_{(i,j,k)}\, h$.

Puisque $C \in \mathcal{O}_3^-(\mathbb{R})$ n'est pas symétrique, h est le produit commutatif d'une rotation $r_{u,\theta}$ et de la réflexion de plan $(\mathbb{R}u)^\perp$.

Déterminons l'axe de la rotation : $\mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_{E_3})$. Le système $C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

équivaut à : $\begin{cases} \sqrt{6}x + 3y + 3z = 0 \\ -\sqrt{6}x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$ donc à $\begin{cases} \sqrt{6}x + 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

L'axe de la rotation est donc dirigé par $u = \sqrt{\frac{3}{5}}\, i - \sqrt{\frac{2}{5}}\, j$.

Déterminons maintenant l'angle θ : $\mathrm{Tr}\, C = -\frac{1}{2}$ donne $-1 + 2\cos\theta = -\frac{1}{2}$ soit $\cos\theta = \frac{1}{4}$.

Calculons le produit mixte $[u, i, h(i)] = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{3}{5}} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\sqrt{\frac{2}{5}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$ donc $\sin\theta$ est

négatif et $\theta = -\mathrm{Arccos}\,\frac{1}{4} \pmod{2\pi}$.

Exemple 15 Interprétation géométrique de $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs colonnes forment un système orthogonal tel que :

$$\| C_1 \| = \| C_2 \| = \| C_3 \| = 2.$$

En posant $A = 2B$ on a donc $B \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et on vérifie facilement que $B \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$.
On définit alors l'homothétie $h : E_3 \to E_3, x \mapsto 2x$ et la rotation r telle que $B = \mathrm{mat}_{(i,j,k)}\, r$ et on a $f = h \circ r = r \circ h$.
Il reste à déterminer les éléments géométriques de r, c'est-à-dire l'axe $\mathbb{R}u$ et l'angle θ.

- La partie antisymétrique de r a pour matrice dans la base (i, j, k) :

$$\frac{1}{2}(B - {}^tB) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc avec $u = pi + qj + rk$, il vient $p\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $q\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $r\sin\theta = 0$.

- On peut choisir $p = q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $r = 0$ c'est-à-dire : $u = \frac{\sqrt{2}}{2}(i + j)$ et alors $\sin\theta = -1$ donc :

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Remarquer que, dans ce cas particulier, le seul calcul de $\sin\theta$ fournit θ (à 2π près).

Exemple 16 Matrice dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ de la rotation d'axe dirigé par $u = \frac{1}{3}(2i - 2j - k)$ et d'angle θ donné par $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\sin\theta = \frac{3}{5}$.

La rotation r est donnée par la formule de la propriété **55** : $r(x) = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}\langle x \mid u\rangle u + \frac{3}{5}u \wedge x$.

La matrice cherchée est donc $M = \frac{4}{5}I_3 + \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}(2 \quad -2 \quad -1) + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Le calcul donne $M = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 40 & 5 & -20 \\ -13 & 40 & -16 \\ 16 & 20 & 37 \end{pmatrix}$.

Copyrighted material

L'essentiel

I. Produit scalaire, orthogonalité

✔ **Si l'on veut** reconnaître un produit scalaire dans une forme bilinéaire donnée analytiquement,

- **on peut** faire apparaître une somme de carrés de formes linéaires.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 1

✔ **Si l'on veut** déterminer une base orthonormale pour un produit scalaire,

- **on peut** si l'on dispose d'une décomposition de $\|x\|^2$ en somme de carrés de formes linéaires indépendantes : $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(x)^2$, trouver des formules de passage à une base orthonormale en identifiant cette expression avec $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, c'est-à-dire en posant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i = \ell_i(x)\ ;$$

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 1

- **on peut** suivre la démarche contenue dans la méthode de Schmidt.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 2

II. Adjoint d'un endomorphisme

✔ **Si l'on veut** utiliser une hypothèse relative à $\operatorname{Ker} f^*$,

- **on peut** exploiter la relation fondamentale $\operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 3

✔ **Si l'on veut** montrer une propriété où intervient la transposée ${}^tA$ d'une matrice,

- **on peut** identifier A et l'endomorphisme canoniquement associé dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 4

III. Endomorphismes remarquables

✔ **Si l'on veut** s'assurer qu'une matrice est diagonalisable,

- **on peut** gagner bien du temps en remarquant qu'elle est réelle et symétrique.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 5, 6

✔ **Si l'on veut** construire une matrice orthogonale qui diagonalise A symétrique réelle,

- **on peut** exploiter que les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.

  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 6, 7

✔ **Si l'on veut** calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel F,

- **on peut** déterminer une base orthonormale de F et utiliser les formules classiques de la projection orthogonale sur F.

Copyrighted material

Méthodes

IV. Formes bilinéaires symétriques

✔ **Si l'on veut** faire apparaître une forme bilinéaire symétrique à partir d'un polynôme quadratique (degré exactement 2 par rapport à l'ensemble des variables),

▪ **on peut** procéder par dédoublement des termes.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 7

✔ **Si l'on veut** déterminer une base de réduction pour une forme bilinéaire φ symétrique,

▪ **on peut** utiliser une base de vecteurs propres pour l'endomorphisme autoadjoint associé à φ.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 7

V. Produit vectoriel

✔ **Si l'on veut** résoudre un système comportant un ou des produits vectoriels,

▪ **on peut** utiliser que $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v.
La formule du double produit vectoriel doit être connue.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 8

✔ **Si l'on veut** former un vecteur directeur de l'intersection de deux plans,

▪ **on peut** en déterminer des vecteurs normaux u et v puis former $u \wedge v$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 9

VI. Espaces euclidiens de dimension 2 ou 3

✔ **Si l'on veut** décrire géométriquement une matrice M orthogonale d'ordre 3,

▪ **on peut** exploiter les informations issues de $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 10, 11

✔ **Si l'on veut** calculer l'inverse d'une matrice A,

▪ **on peut** d'abord examiner si elle n'est pas orthogonale, auquel cas on a $A^{-1} = {}^tA$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 11

Copyrighted material

Mise en œuvre

I. Produit scalaire, orthogonalité

Ex. 1

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et sa base canonique (e_1, e_2, e_3).

Pour $(x, y) \in E^2$, on note $x = (x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$, $y = (y_1, y_2, y_3) = \sum_{i=1}^{3} y_i e_i$.

On considère l'application : $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x_1y_1 + 3x_2y_2 + 6x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1$.

1) Vérifier que : $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 2x_3)^2$. **(1)**

En déduire que φ est un produit scalaire euclidien sur E. On note encore E l'espace euclidien ainsi défini.

2) Déduire de la formule **(1)** une base orthonormale de E.

3) Trouver des réels a, b tels que : $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (ax_2 + bx_3)^2 + dx_3^2$. **(2)**

En déduire une nouvelle base orthonormale de E.

Indications

Il est clair que φ est bilinéaire.

On compare la norme de x dans une base orthonormale avec $\varphi(x, x)$ **(1)**. Des formules de changement de base on déduit une base utile par résolution d'un système linéaire.

En question 3), on améliore le choix d'une base orthonormale avec le même procédé.

Solution

1) Pour $x \in E$, on a : $\varphi(x, x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ et la vérification demandée est sans difficulté. En particulier, $\varphi(x, x) = 0$ implique $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, $x_2 - 2x_3 = 0$, d'où $x = 0$.

2) Une base $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ est orthonormale si et seulement si on a :

pour tout $x = \sum_{i=1}^{3} x'_i e'_i$, $\|x\|^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_2'^3$ **(3)**.

Il suffit de poser : $x'_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $x'_2 = x_2 + x_3$, $x'_3 = x_2 - 2x_3$.

Ces formules s'écrivent $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Comme M est inversible et on a aussi : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$.

Pour le calcul de M^{-1}, il vient successivement :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = x'_1 \\ x_2 + x_3 = x'_2 \\ 3x_3 = x'_2 - x'_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x'_1 - x'_2 \\ x_2 = \frac{2}{3}x'_2 + \frac{1}{3}x'_3 \\ x_3 = \frac{1}{3}x'_2 - \frac{1}{3}x'_3 \end{cases}$$

donc $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Commentaires

En développant la forme attendue.

$\|x\|^2 = \varphi(x, x)$.

$\det M = -3$.

Méthode du pivot.

Copyright © Vuibert

$P = M^{-1}$ est la matrice de passage de la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$ à la base orthonormale $\left(e'_1\right)_{1\leqslant i\leqslant 3}$ et on a donc :

$$e'_1 = e_1,\quad e'_2 = -e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3,\quad e'_3 = \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3.$$

3) Écrivons $\varphi(x, x)$ en ordonnant par rapport à x_1 :

$$\varphi(x, x) = x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + 3x_2^2 + 6x_3^2.$$

Remarquons que x_3 ne figure que dans le premier carré de la formule (2).

Avec $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2$, on en déduit :

$\varphi(x, x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_2x_3$.

En notant que : $2\left(x_2^2 - x_2x_3\right) = 2\left(\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{4}x_3^2\right)$ d'où finalement : $\varphi(x, x) = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 + 2\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{9}{2}x_3^2$ ou

$$\varphi(x, x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + \left(x_2\sqrt{2} - x_3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3x_3}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

On pose : $\begin{cases} x''_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ x''_2 = x_2\sqrt{2} - x_3\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x''_3 = \dfrac{3}{\sqrt{2}}x_3 \end{cases}$

On opère comme en 2).

c'est-à-dire $\begin{cases} x_1 = x''_1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}x''_2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}x''_3 \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x''_2 + \dfrac{\sqrt{2}}{6}x''_3 \\ x_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{3}x''_3 \end{cases}$

L'inversion est facile. Ce sont là les formules de changement de base faisant passer de la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$ à $(e''_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

$$e''_1 = e_1,\quad e''_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2,\quad e''_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{6}e_2 + \frac{\sqrt{2}}{3}e_3.$$

À la lecture de la matrice Q.

La base $\left(e''_i\right)_{1\leqslant i\leqslant 3}$ est orthonormale car, dans celle-ci, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{3} x''^2_1$.

Ex. 2

On considère encore l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire défini dans l'exemple **1**.

Trouver une base orthonormale de E en appliquant le procédé de Schmidt à la base canonique $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$.

Indications

On applique méthodiquement la démarche vue en cours (chapitre 5).

Solution

On obtient successivement :

- $\|e_1\| = 1$ donc $u = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} = e_1$
- $v' = e_2 - \langle u \mid e_2\rangle u = e_2 - e_1$, donc $v = \dfrac{v'}{\|v'\|} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}e_2$

$\|v'\|^2 = 2$.

Commentaires

(u, v, w) est la base cherchée.

Copyrighted material

$$w = \frac{w'}{\|w'\|} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} w' &= e_3 - \langle u \,|\, e_3\rangle u - \langle v \,|\, e_3\rangle v \\ &= e_3 - u + \frac{\sqrt{2}}{2} v \\ &= -\frac{3}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2 + e_3 \end{aligned}$$

$\|w'\|^2 = \frac{9}{2}$ donc $w = -\frac{\sqrt{2}}{2} e_1 + \frac{\sqrt{2}}{6} e_2 + \frac{\sqrt{2}}{3} e_3$.

Cette base n'est autre que (e_1'', e_2'', e_3'') obtenue au 3) de l'exemple **1**. C'est l'unique base orthonormale telle que :

$$\text{Vect}\,(e_1'') = \text{Vect}\,(e_1) \quad , \quad \text{Vect}\,(e_1'', e_2'') = \text{Vect}\,(e_1, e_2),$$

c'est-à-dire déduite de $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ par le procédé de Schmidt et vérifiant les conditions $\langle e_i \,|\, e_i'' \rangle > 0$ pour $i \in [\![1, 3]\!]$.

Ceci pouvait se prévoir car la matrice de passage Q était triangulaire.

II. Adjoint d'un endomorphisme

Ex. 3

Soit f un endomorphisme nilpotent d'un espace euclidien E, tel que $\text{Ker}\, f = \text{Ker}\, f^*$. Montrer que $f = 0$.

Indications

On établit que $E = \text{Im}\, f \oplus \text{Ker}\, f$ et que $\text{Im}\, f \subset \text{Im}\, f^n$.

La structure d'espace euclidien sert pour définir f^* et avoir $\text{Ker}\, f^* = (\text{Im}\, f)^\perp$.

Solution

Avec $\text{Ker}\, f^* = (\text{Im}\, f)^\perp$, il vient $E = \text{Im}\, f \oplus \text{Ker}\, f$.

Tout x de E s'écrit donc $x = x' + x''$ avec $x \in \text{Ker}\, f$ et $x'' \in \text{Im}\, f$ donc :

$$x'' = f(x_1), \quad x_1 \in E$$

et on obtient $f(x) = f^2(x_1)$. De même, il existe x_2 tel que $f(x_1) = f^2(x_2)$ donc :

$$f(x) = f^3(x_2).$$

On itère le procédé : il existe $x_{n-1} \in E$ tel que $f(x) = f^n(x_{n-1})$.

Or $f^n = 0$ donc $\forall x \in E,\ f(x) = 0$ c'est-à-dire $f = 0$.

Commentaires

$\text{Ker}\, f = (\text{Im}\, f)^\perp$. $\text{Ker}\, f$ et $\text{Im}\, f$ sont donc supplémentaires orthogonaux.

n dimension de E.

Ex. 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{rg}\, A = \text{rg}\, {}^tAA$.

Indications

On identifie A et l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé.

Grâce au théorème du rang, il revient au même de prouver que $\text{Ker}(u^* \circ u) = \text{Ker}\, u$.

Solution

Comme on a $\text{Ker}(u^* \circ u) \subset \text{Ker}\, u$, il suffit de prouver $\text{Ker}(u^* \circ u) \supset \text{Ker}\, u$.

Soit $x \in \text{Ker}(u^* \circ u)$. Alors $(u^* \circ u)(x) = 0$, ce qui donne :

$$\langle (u^* \circ u)(x) \,|\, x \rangle = 0, \text{ donc } \langle u(x) \,|\, u(x) \rangle.$$

Alors $\|u(x)\| = 0$ donne $u(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \text{Ker}\, u$.

Commentaires

$u(x)=0 \Rightarrow u^* \circ u(x)=0$.

Par définition de l'adjoint.

Copyrighted material

III. Endomorphismes remarquables

Ex. 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Trouver $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Indications

A est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique.

Solution

$\chi_A = \det(A - XI_3) = -X(X+1)(X-3)$.

Les trois sous-espaces propres sont des droites deux à deux orthogonales.

On trouve pour sous-espaces propres :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} A &= \operatorname{Vect}\big((-1,1,1)\big) \\ \operatorname{Ker}(A + I_3) &= \operatorname{Vect}\big((1,0,1)\big) \\ \operatorname{Ker}(A - 3I_3) &= \operatorname{Vect}\big((1,2,-1)\big) \end{aligned}$$

Une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ est donc (u, v, w) avec :

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) \ , \ v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) \ , \ w = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1).$$

En conséquence, on a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}).$$

Commentaires

Polynôme caractéristique.

Trois valeurs propres simples.

En identifiant A et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Ex. 6

Étant donné $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$, reconnaître l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ enclidien canonique dont la matrice est $A = I_n - 2U\,{}^tU$.

Indications

Vérifier que A est symétrique et orthogonale.

Solution

On a ${}^tA = I_n - 2\,{}^t(U\,{}^tU) = I_n - 2U\,{}^tU = A$.

$A\,{}^tA = A^2 = I_n - 4U\,{}^tU + 4(U\,{}^tU)(U\,{}^tU)$.

L'hypothèse sur U se lit ${}^tU\,U = 1$, et on a donc

$$(U\,{}^tU)(U\,{}^tU) = U({}^tU\,U)\,{}^tU = U\,{}^tU,$$

d'où on déduit que A est orthogonale.

$\forall X \in \mathbb{R}^n$, $AX = X - 2\langle X \mid U\rangle U$ montre que A décrit la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $U^{\perp}$.

Commentaires

A est symétrique.

Carré de $(I_n - V)$ avec $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

${}^tU\,U = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$.

$A\,{}^tA = A^2 = I_n - 4U\,{}^tU + 4U\,{}^tU = I_n$.

$X \mapsto \langle X \mid U\rangle U$ est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}\,U$.

Copyrighted material

IV. Formes bilinéaires symétriques

Ex. 7

Soit $E = \mathbb{R}^3$ euclidien canonique. On considère $q : E \to \mathbb{R}, u = (x, y, z) \mapsto 4x^2+7y^2+4z^2+axy-2xz-4yz$.

1) Décrire une forme bilinéaire symétrique φ telle que $\varphi(u, u) = q(u)$ ainsi que l'endomorphisme autoadjoint f qui lui est associé.

2) Déterminer une base de réduction de φ.

Indications

1) On procède par la règle dite de «dédoublement des termes» : $x^2 \mapsto xx'$, $2xy \mapsto xy' + x'y$ et les analogues.

2) Une telle base est formée de vecteurs propres de f.

Solution

1) On considère la forme bilinéaire φ définie par :

$\varphi(u, v) =$

$$4xx' + 7yy' + 4zz' + 2(xy' + x'y) - (xz' + x'z) - 2(yz' + y'z).$$

Il est alors immédiat que $\forall u \in E,\ q(u) = \varphi(u, u)$.

La matrice associée à φ est $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

f est l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E.

2) Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 4-X & 2 & -1 \\ 2 & 7-X & -2 \\ -1 & -2 & 4-X \end{vmatrix}$$ factorisable par $3 - X$.

On obtient $\chi_A(X) = (3 - X)^2(9 - X)$.

Le sous-espace propre V_3 associé à 3 est le plan d'équation

$$x + 2y - z = 0.$$

Celui associé à 9 est la droite V_9 dirigée par $d = (1, 2, -1)$.

Une base orthonormale $\mathcal{B}'$ formée de vecteurs propres est par exemple

$$e'_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1),\ e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1),\ e'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1).$$

La matrice de passage est $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de f est $D = \mathrm{diag}(9, 3, 3)$.

Dans cette base, on a $\varphi(u, v) = 9x_1x_2+3y_1y_2+3z_1z_2$ et, en particulier :

$$q(u) = 9x_1^2 + 3y_1^2 + 3z_1^2.$$

Commentaires

$u=(x,y,z)$ et $v=(x',y',z')$ dans E.

Règle de «dédoublement des termes».

$\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est orthonormale.

Pour les valeurs propres.

Addition des colonnes 1 et 3.

On sait que A est diagonalisable.

Il est orthogonal à V_3.

Choix d'une base de V_3.

Les deux bases sont orthonormales.

$u=(x_1,y_1,z_1)$ et $v=(x_2,y_2,z_2)$ dans $\mathcal{B}'$.

Copyrighted material

V. Produit vectoriel

Ex. 8

Soit E l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ orienté (par la base canonique) et (a, b, c) une famille libre de E.

Déterminer $(x, y, z) \in E^3$ tel que **(S)** : $\left\{ y \wedge z = a,\ \ z \wedge x = b,\ \ x \wedge y = c \right\}$.

Indications

Un produit vectoriel $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v.

Si un vecteur est orthogonal à deux vecteurs indépendants u et v, alors il est colinéaire à $u \wedge v$.

La formule du double produit vectoriel est souvent incontournable dans ce type de problème.

(a, b, c) étant une base de E, on a $[a, b, c] > 0$ quand elle est directe.

Solution

Conditions nécessaires : $b = z \wedge x$ et $c = x \wedge y$ donne $\langle x \mid b \rangle = \langle x \mid c \rangle = 0$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda b \wedge c$.

De manière analogue, on a $y = \mu\, c \wedge a$ et $z = \nu\, a \wedge b$.

De plus que $y \wedge z = a$ donne $\langle x \mid a \rangle = [x, y, z]$

et de même $\langle y \mid b \rangle = [x, y, z]$ et $\langle z \mid c \rangle = [x, y, z]$

d'où $\langle x \mid a \rangle = \langle y \mid b \rangle = \langle z \mid c \rangle$,

puis $\lambda[a, b, c] = \mu[a, b, c] = \nu[a, b, c]$ donc $\lambda = \mu = \nu$.

En conclusion, si $(x, y, z) \in E^3$ est solution de **(S)**, on a nécessairement :

$$x = \lambda\, b \wedge c, \quad y = \lambda\, c \wedge a, \quad z = \lambda\, a \wedge b.$$

Réciproquement, pour tout triplet $(x, y, z) \in E^3$ de la forme précédente,

on a $y \wedge z = \lambda^2 (c \wedge a) \wedge (a \wedge b)$ donc

$$y \wedge z = \lambda^2 \langle c \wedge a \mid b \rangle a - \lambda^2 \langle c \wedge a \mid a \rangle b = \lambda^2 [a, b, c] a.$$

La condition $y \wedge z = a$ s'écrit $\lambda^2 [a, b, c] = 1$, donc $\lambda = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{[a, b, c]}}$.

On a également :

$$z \wedge x = \lambda^2 [a, b, c] b = b, \text{ et } x \wedge y = \lambda^2 [a, b, c] c = c.$$

Conclusion

- si la base (a, b, c) est rétrograde, **(S)** n'a pas de solution,
- si la base (a, b, c) est directe, **(S)** a deux solutions :

$$\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta}} b \wedge c,\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta}} c \wedge a,\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta}} a \wedge b \right) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Commentaires

On suppose $(x,y,z) \in E^3$ solution de **(S)**.

x est colinéaire à $b \wedge c$.

Avec μ et ν réels.

(a,b,c) étant libre, on a $[a,b,c] \neq 0$.

Avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Double produit vectoriel.

Ce qui impose $[a,b,c] > 0$.

Permutation circulaire sur (x,y,z) et (a,b,c).

$\Delta = [a,b,c]$.

Copyrighted material

Ex. 9

1) Soit $u = (a, b, c)$ et $v = (a', b', c')$ dans $\mathbb{R}^3$, résoudre le système $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$

2) Résoudre $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 4x + 6y - 7z = 3 \end{cases}$

Indications

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique.

1) On est ramené à la description de $u^\perp$ et $v^\perp$.

2) Un changement immédiat d'inconnues ramène à un système linéaire.

Solution

1) On écarte les cas où $u = (0, 0, 0)$ ou $v = (0, 0, 0)$ ou u et v liés.

$ax + by + cz = 0$ est le plan P orthogonal à u et $a'x + b'y + c'z = 0$ est le plan Q orthogonal à v.

Les solutions sont les éléments de $\mathbb{R}(u \wedge v)$.

2) Le second système équivaut à $\begin{cases} 3(x-1) - 2(y-1) + (z-1) = 0 \\ 4(x-1) + 6(y-1) - 7(z-1) = 0 \end{cases}$

Avec $d = (3, -2, 1) \wedge (4, 6, -7) = (8, 25, 16)$, l'ensemble des solutions est $(1, 1, 1) + \mathbb{R}d$.

Commentaires

L'ensemble est E ou un des deux plans.

Droite affine.

VI. Espaces euclidiens de dimension 2 ou 3

Ex. 10

Étudier les matrices $A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.

Indications

Pour une matrice M orthogonale non symétrique, exploiter $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

Solution

Les matrices A et B sont orthogonales.

Plus précisément, $A \in \mathcal{O}^+(E)$ et $B \in \mathcal{O}^-(E)$.

1) $\operatorname{Tr} A = -\frac{7}{9}$ donne $\cos\theta = -\frac{8}{9}$ donc $\theta = \pm \operatorname{Arccos}\left(-\frac{8}{9}\right)$ ou encore :

$$\theta = \pm\left(\pi - \operatorname{Arccos}\frac{8}{9}\right)$$

puis $\frac{1}{2}(A - {}^tA) = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donne :

Commentaires

Vérification numérique sans difficulté.

Comparer un terme et son cofacteur.

Copyrighted material

$\sin\theta < 0$ autour de $\overrightarrow{k} = \frac{1}{\sqrt{17}}(1, 0, -4)$.

$\sin\theta\,\overrightarrow{k} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}$.

D'où finalement, $\theta = \operatorname{Arccos}\frac{8}{9} - \pi$.

2) $C = -B \in \mathcal{O}^+(E)$. On a $\operatorname{Tr} C = \frac{23}{9}$, donc :

$$\cos\theta = \frac{7}{9} \text{ et } \theta = \pm\operatorname{Arccos}\frac{7}{9}.$$

$\frac{1}{2}(C - {}^tC) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}0 & 4 & -4\\-4 & 0 & 0\\4 & 0 & 0\end{pmatrix}$, donne $\sin\theta < 0$ autour de

$\sin\theta = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

$\overrightarrow{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$, et finalement, $\theta = -\operatorname{Arccos}\frac{7}{9}$.

Alors B représente la composée de la rotation d'angle $\theta + \pi$ autour de $\overrightarrow{d}$ et de la réflexion de plan $\overrightarrow{d}^{\perp}$.

Composée commutative.

Ex. 11

1) Étudier les endomorphismes de E euclidien orienté de dimension 3 dont les matrices dans une base orthonormale directe sont $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\2 & 1 & -2\\1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & 6 & 3\\3 & 2 & -6\\6 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

2) En considérant A et B comme des matrices de passage d'une base orthonormale $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ et B comme matrice de passage de $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}''$, former la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}''$.

Indications

A et B sont orthogonales.

Pour la formule de changement de base, on allège les calculs avec $A^{-1} = {}^tA$.

Solution

Commentaires

1) A et B sont orthogonales, $A \in \mathcal{O}^+(E)$ et $B \in \mathcal{O}^-(E)$.

Étude sans difficulté.

$\operatorname{Tr} A = \frac{5}{3}$ donne $\cos\theta = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}(A - {}^tA) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\2 & 0 & -2\\0 & 2 & 0\end{pmatrix}$

donne $\sin\theta > 0$ autour de $\overrightarrow{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, donc $\theta = \operatorname{Arccos}\frac{1}{3}$.

$\sin\theta\,\overrightarrow{k} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$C = -B \in \mathcal{O}^+(E)$. $\operatorname{Tr} C = -\frac{6}{7}$ donne $\cos\theta' = -\frac{13}{14}$

et $\frac{1}{2}(C - {}^tC) = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\-3 & 0 & -3\\3 & 3 & 0\end{pmatrix}$ donne $\sin\theta' > 0$ autour de

$\sin\theta'\,\overrightarrow{k'} = \frac{3}{14}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{k'} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$. Donc $\theta' = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{13}{14}\right) = \pi - \operatorname{Arccos}\frac{13}{14}$.

Ainsi B représente la composée de la rotation d'angle $-\operatorname{Arccos}\frac{13}{14}$ autour de $\overrightarrow{k'}$ et de la réflexion de plan $\overrightarrow{k'}^{\perp}$.

2) $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$

Formule de changement de bases.

D'où $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} = A^{-1}B = {}^tAB = \frac{1}{21}\begin{pmatrix}16 & 13 & -4\\11 & -16 & -8\\8 & -4 & 19\end{pmatrix}$.

A est orthogonale.

Copyrighted material

Exercices

Niveau 1

Ex. 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Trouver $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Ex. 2

Dans $E = \mathbb{R}^3$ euclidien canonique orienté, on donne un vecteur a non nul.

Montrer que tout vecteur x de E est déterminé par la donnée des deux produits $\langle a \,|\, x \rangle$ et $a \wedge x$.

Ex. 3

Dans $E = \mathbb{R}^3$ euclidien canonique orienté, on donne trois vecteurs a, b, c.

Prouver l'équivalence

$$(a, b, c) \text{ libre} \iff (b \wedge c\,,\ c \wedge a\,,\ a \wedge b) \text{ libre.}$$

Ex. 4

Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien, on considère l'ensemble F des vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tels que

$$\sum_{k=1}^{4} x_k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{4} k x_k = 0$$

Former la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de la réflexion de plan F.

Ex. 5

Étudier l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ euclidien dont la matrice est $M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Ex. 6

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. On considère des rotations f et g qui ne sont ni Id_E ni des demi-tours.

Que peut-on dire de f et g si elles commutent ?

Niveau 2

Ex. 7

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

À tout point M du plan, on associe ses images M_0, M_1, M_2 dans les réflexions d'axes $\mathcal{D}$, Ox et Oy respectivement.

Trouver l'ensemble des points M tels que M_0, M_1, M_2 soient alignés.

Ex. 8

Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux bases orthonormales de E espace vectoriel euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On pose $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle u(e_i) \,|\, f_j \rangle^2$, montrer que A ne dépend ni de la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, ni de la base $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Exprimer A en fonction de u.

Ex. 9

1) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie impaire et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer qu'il existe au moins un hyperplan de E stable par f.

2) Trouver les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ex. 10

Trouver les matrices $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(A - \lambda I_n)^2 = 0$.

Ex. 11

Soit $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Quel endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ euclidien la matrice A représente-t-elle ?

2) Trouver toutes les matrices qui commutent avec A.

Ex. 12

Dans un espace euclidien orienté E de dimension 3, on considère des rotations r et R.

Étudier $f = r^{-1} \circ R \circ r$.

Copyrighted material

Ex. 13

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E), f \neq 0$.

Montrer que f est une rotation si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y).$$

Ex. 14

Soit (i, j, k) une base orthonormale directe de E espace euclidien orienté de dimension 3, montrer qu'il existe une unique rotation f telle que :

$$f(i + j + k) = i + j - k \text{ et } f(3i + j) = 3j - k.$$

Ex. 15

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, déterminer le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & 2 \\ & (0) & & \vdots \\ & & & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Ex. 16

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme symétrique à valeurs propres strictement positives.

1) S étant la sphère unité de E :

$$S = \{x \in E / \|x\| = 1\}$$

déterminer le minimum sur S de l'application

$$f : x \mapsto \langle u(x) \,|\, x \rangle \langle u^{-1}(x) \,|\, x \rangle$$

2) En quels points de S ce minimum est-il atteint ?

Ex. 17

Soit (i, j) la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$. Pour tout u de E, on pose : $u = (x, y) = xi + yj$

1) Montrer que $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$,

$$(u_1, u_2) \mapsto x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3y_1y_2$$

est un produit scalaire sur E.

2) Trouver une base (I, J) de E orthonormale pour ce produit scalaire.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ par :

$$f(u) = \frac{x^2 + 3xy + 5y^2}{x^2 + 2xy + 3y^2}$$

a) Écrire l'expression de $f(u)$ en fonction de (X, Y) coordonnées de u dans la base (I, J).

b) Prouver qu'il existe une base (I', J') de E dans laquelle, en posant $u = X'I + Y'J$, on a :

$$f(u) = \frac{\lambda X'^2 + \mu Y'^2}{X'^2 + Y'^2}$$

c) En déduire les bornes de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Ex. 18

L'espace euclidien orienté E, de dimension 3, est rapporté à une base orthonormale directe (i, j, k).

Trouver les similitudes f de E telles que :

$$\begin{aligned} f(j + 2k) &= 15i - 30k \\ f(i + 2j - k) &= 30i - 15j + 15k \end{aligned}$$

Niveau 3

Ex. 19

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 2$, telle que $A = \lambda \operatorname{Com} A$ **(1)** où $\operatorname{Com} A$ désigne la matrice des cofacteurs de A.

Ex. 20

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3,

$a \in E \setminus \{0\}$, et $u \in \mathcal{L}(E)$, $u : x \mapsto a \wedge x$.

Montrer que $r : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n(x)}{n!}$ est une rotation.

Pour la convergence de la série, voir l'indication.

Ex. 21

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Étant donné $f \in \mathcal{L}(E)$, on définit θ par

$$\theta(x, y, z) = [f(x), y, z] + [x, f(y), z] + [x, y, f(z)]$$

1) Simplifier $\theta(x, y, z)$

2) Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ unique telle que, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$g(x \wedge y) = f(x) \wedge y + x \wedge f(y)$$

Ex. 22

Une matrice symétrique réelle A est dite :

- positive lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ {}^tXAX \geqslant 0$$

- définie-positive lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1,}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \ {}^tXAX > 0$$

On note $\mathcal{S}_n^+$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}$) l'ensemble des matrices symétriques réelles positives (resp. définies-positives).

1) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+ \iff \operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$

2) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++} \iff \operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$

3) Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tMM$ est positive. À quelle condition est-elle définie-positive ?

Copyrighted material

Ex. 23

Soit $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique de plus grande valeur propre λ_1. On note E l'espace vectoriel des matrices $n \times 1$ réelles.

1) Montrer que : $\forall X \in E,\ {}^tXAX \leqslant \lambda_1\, {}^tXX$.

2) On suppose que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \ \Rightarrow\ a_{ij} \geqslant 0$$

Pour tout $X \in E$, on note $\overline{X}$ l'élément de E dont les termes sont les valeurs absolues de ceux de X.

a) Montrer que : $\forall X \in E,\ {}^tXAX \leqslant {}^t\overline{X}A\overline{X}$.

b) Montrer que si X est vecteur propre de A associé à λ_1, $\overline{X}$ l'est aussi.

Ex. 24

1) Montrer que pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ il existe un couple unique (S,T) formé d'une matrice orthogonale S et d'une matrice triangulaire supérieure T à éléments diagonaux dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que $A = ST$.

2) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$|\det A| \leqslant \left(\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Indications

Ex. 7

Le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ est :

$$p(\overrightarrow{v}) = \frac{\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{v}}{\| \overrightarrow{v} \|^2}.$$

L'image de $\overrightarrow{v}$ dans la symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ est : $s(\overrightarrow{v}) = 2p(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v}$.

$M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Ex. 8

1) Pour x de E, les coordonnées de x sur $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont les nombres $\langle f_i \mid x \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

2) Faire apparaître l'adjoint de u.

Ex. 9

F, sous-espace de E, est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par f^*.

Ex. 10

- Commencer par calculer les valeurs possibles de λ.
- Pour qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit nulle, il faut et il suffit que $\mathrm{Tr}\ {}^tMM = 0$.

Ex. 11

1) $-A$ est une matrice de rotation.

2) Montrer que la dimension du commutant de A est 3.

Ex. 12

f est une rotation. Étudier son axe.

Pour l'angle, commencer par étudier $\mathrm{Tr}\, f$.

Ex. 13

Si $f \in \mathcal{SO}(E)$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ équivaut à :

$\forall z \in E,\quad \langle f(x \wedge y) \mid f(z) \rangle = \langle (f(x) \wedge f(y)) \mid f(z) \rangle$.

Ex. 14

Trouver un système de trois équations vérifié par :

$$\big(f(i), f(j), f(k)\big).$$

Ex. 15

A est symétrique réelle. Examiner son rang.

Exprimer qu'un vecteur non nul est propre pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Ex. 16

1) Diagonaliser u dans une base orthonormale.

2) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Copyrighted material

Ex. 17

1) $\varphi(u,u) = x^2 + 2xy + 3y^2 = (x+y)^2 + 2y^2$.

(I, J) est une base orthonormale si et seulement si pour tout $u = XI + YJ$ de E, $\varphi(u,u) = X^2 + Y^2$.

2) En posant $U = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ on a :

$$X^2 + XY\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}Y^2 = {}^tU \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} U$$

Diagonaliser A dans le groupe orthogonal.

Ex. 18

Calculer le rapport λ de la similitude et poser $g = \frac{1}{\lambda} f$.

$\big(g(i), g(j), g(k)\big)$ est une base orthonormale directe ou rétrograde selon le cas.

Ex. 19

Pour toute matrice A, on a :

$$A({}^t\mathrm{Com}\, A) = ({}^t\mathrm{Com}\, A)A = (\det A) I_n$$

Envisager les cas $\det A = 0$ et $\det A \neq 0$.

Ex. 20

Commencer par prouver la convergence de la série. Pour cela, on admet que, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, la convergence de la série des normes implique la convergence de la série de vecteurs.

Calculer $u^n(x)$ en fonction de $u(x)$ et de $u^2(x)$.

Utiliser l'expression vectorielle d'une rotation.

Ex. 21

1) θ est trilinéaire alternée.

2) Former $\langle g(x \wedge y) \,|\, z \rangle$.

Ex. 22

A est diagonalisable dans une base de vecteurs propres.

1) et **2)** Utiliser ${}^tXDX$ avec D diagonale.

3) Il faut M inversible.

Ex. 23

Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$${}^tPAP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

En posant $Y = PX$ on a :

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i^2 \text{ et } {}^tXX = {}^tYY.$$

Ex. 24

1) $AT^{-1} = S$, T^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ base de $\mathbb{R}^n$ formée des vecteurs colonnes de A à $\mathscr{B}''$ base orthonormale déduite de $\mathscr{B}'$ par le procédé de Schmidt.

Copyrighted material

Hidden page

Ex. 4

F est l'intersection de deux hyperplans distincts de $\mathbb{R}^4$, c'est donc un sous-espace de dimension 2.

Notons (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Un autre système d'équations de F est $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

Une base de F est (u, v), où $u = (1, -2, 1, 0)$ et $v = (2, -3, 0, 1)$.

Un vecteur $w' = v + \lambda u$ est orthogonal à u si et seulement si $\langle v \mid u \rangle + \lambda \| u \|^2 = 0$ c'est-à-dire $\lambda = -\frac{4}{3}$.

Posons $w = 3v - 4u = (2, -1, -4, 3)$. Ainsi, (u, w) est une base orthogonale de F.

Soit p la projection orthogonale sur F : $\forall x \in \mathbb{R}^4, p(x) = \langle x \mid u \rangle \frac{u}{\| u \|^2} + \langle x \mid w \rangle \frac{w}{\| w \|^2}$.

Il vient donc $p(e_1) = \frac{1}{6}u + \frac{1}{15}w$, $p(e_2) = -\frac{1}{3}u - \frac{1}{30}w$, $p(e_3) = \frac{1}{6}u - \frac{2}{15}w$, $p(e_4) = \frac{1}{10}w$.

La matrice de p est $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Celle de la réflexion $s = 2p - \mathrm{Id}$ est $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

Ex. 5

En formant les produits scalaires des vecteurs-colonnes deux à deux, on voit que M est orthogonale.

Elle est en outre symétrique. Il suffit alors d'étudier ses vecteurs invariants.

Avec $M - I = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -9 & 6 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, il vient $MX = X$ si et seulement si $3x - 2y + z = 0$

et M représente la réflexion de plan $P = (\mathbb{R}u)^\perp$ avec $u = (3, -2, 1)$.

Ex. 6

Puisque $f \neq \mathrm{Id}_E$, $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ est une droite vectorielle.

Soit u un vecteur normé, base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. On a donc $f \circ g(u) = g \circ f(u) = g(u)$.

Ainsi $g(u)$ est un vecteur invariant par f, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g(u) = \lambda u$.

Or g, qui est une rotation autre qu'un demi-tour ou Id_E, admet 1 pour unique valeur propre.

Par suite, $g(u) = u$ et u est un vecteur directeur de l'axe de la rotation g.

Ainsi les rotations f, g ont nécessairement le même axe (droite des vecteurs invariants).

Réciproquement, soit f et g des rotations de même axe dirigé par u supposé normé.

Dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (i, j, u)$, les rotations f et g ont des matrices de la forme :

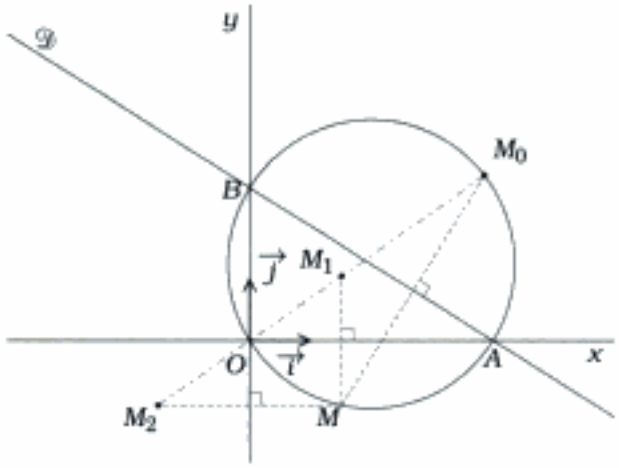
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' & 0 \\ \sin\theta' & \cos\theta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont la même matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') & 0 \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Copyrighted material

Niveau 2

Ex. 7



$\mathscr{D}$ est définie par les points $A(a,0)$ et $B(0,b)$, donc est dirigée par $\overrightarrow{AB} = -a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$.

Étant donné un point $M(x,y)$, on a :

$$M = O + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \quad , \quad M_1 = O + x\vec{\imath} - y\vec{\jmath} \quad , \quad M_2 = O - x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \text{ puis } \overrightarrow{AM_0} = 2\,\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}$$

donc avec $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -a(x-a) + by$ et $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = a^2 + b^2$, il vient :

$$x_0 = \frac{x\left(a^2-b^2\right) - 2aby + 2ab^2}{a^2+b^2} \quad , \quad y_0 = \frac{-2abx + \left(b^2-a^2\right)y + 2a^2b}{a^2+b^2}$$

En conséquence les trois points M_0, M_1, M_2 sont alignés si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x\left(a^2-b^2\right) - 2aby + 2ab^2}{a^2+b^2} & -x & x \\ \dfrac{-2abx + \left(b^2-a^2\right)y + 2a^2b}{a^2+b^2} & y & -y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

donc si et seulement si $\begin{vmatrix} x\left(a^2-b^2\right) - 2aby + 2ab^2 & -x & x \\ -2abx + \left(b^2-a^2\right)y + 2a^2b & y & -y \\ a^2+b^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, soit encore :

$$\begin{vmatrix} x\left(a^2-b^2\right) - 2aby + 2ab^2 & 0 & x \\ -2abx + \left(b^2-a^2\right)y + 2a^2b & 0 & -y \\ a^2+b^2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

d'où enfin $x^2 + y^2 - ax - by = 0$. Ainsi $\mathscr{L}$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Ex. 8

Sur la base orthonormale $(f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \langle f_j \mid u(e_i)\rangle f_j$,

donc $\| u(e_i)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left\langle f_j \middle| u(e_i)\right\rangle^2$. Ainsi $A = \sum_{i=1}^{n} \| u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\langle u(e_i) \middle| u(e_i)\right\rangle$

et en introduisant l'adjoint de u : $A = \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i \middle| u^* \circ u(e_i)\right\rangle$.

Sous cette dernière forme, on reconnaît la trace de $u^* \circ u$: $A = \mathrm{Tr}(u^* \circ u)$.

Copyrighted material

Ex. 9

1) On munit E d'une structure euclidienne quelconque, E étant de dimension impaire, le polynôme caractéristique de f^* : $\chi_{f^*} = \chi_f$ admet au moins une racine réelle donc f^* admet au moins un vecteur propre u.

Alors la droite $\mathbb{R}u$ est stable par f^* et dans ces conditions, l'hyperplan $H = (\mathbb{R}u)^\perp$ est stable par $f = f^{**}$.

2) Calculons $\chi_f = \det(A - XI_3) = (2 - X)^3$.

- Une droite $D = \mathbb{R}u$ est stable par f si et seulement si u est vecteur propre de f.

Le sous-espace propre $\operatorname{Ker}\left(f - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$ est défini par le système : $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$

et on obtient $\operatorname{Ker}\left(f - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \operatorname{Vect}(u)$, avec $u = (0, 1, 1)$. Il y a donc une seule droite stable : $\mathbb{R}u$.

- Un plan $P = (\mathbb{R}v)^\perp$ est stable par f si et seulement si son orthogonal $\mathbb{R}v$ est stable par f^* donc si et seulement si v est vecteur propre de f^*.

On obtient $\operatorname{Ker}\left(f^* - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \operatorname{Vect}(v)$, avec $v = (1, 1, -1)$. Il y a donc un seul plan stable : $P = (\mathbb{R}v)^\perp$.

Dans la base canonique, P a pour équation $x + y - z = 0$.

Ex. 10

- Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est solution du problème associée au réel λ, on a $\det(A - \lambda I_n) = 0$, donc λ est valeur propre de A et puisque A est orthogonale, on a nécessairement $\lambda = 1$ ou -1.
- Supposons $\lambda = 1$ et $(A - I_n)^2 = 0$ avec $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

On sait que $M \mapsto \left(\operatorname{Tr} {}^tMM\right)^{\frac{1}{2}}$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Formons donc $\| A - I_n \|^2 = \operatorname{Tr}\left({}^t\left(A - I_n\right)\left(A - I_n\right)\right) = \operatorname{Tr}\left(2I_n - A - {}^tA\right)$.

Or $2I_n - A - {}^tA = -{}^tA\left(A^2 + I_n - 2A\right)$ (car ${}^tAA = I_n$) $= -{}^tA\left(A - I_n\right)^2 = 0$ donc $\| A - I_n \|^2 = 0$ et $A = I_n$.

- De même, pour $\lambda = -1$, en supposant $(A + I_n)^2 = 0$, on obtient :

$$\| A + I_n \|^2 = \operatorname{Tr}\left({}^tA\left(A + I_n\right)^2\right) = 0 \text{ donc } A = -I_n$$

Les seules solutions du problème sont I_n ($\lambda = 1$) et $-I_n$ ($\lambda = -1$).

Ex. 11

1) En notant c_1, c_2 et c_3 les vecteurs-colonnes de A dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$, on vérifie :

$$\begin{cases} \| c_1 \| = \| c_2 \| = \| c_3 \| = 1 \\ \langle c_1 \mid c_2 \rangle = \langle c_2 \mid c_1 \rangle = \langle c_3 \mid c_1 \rangle = 0 \end{cases}$$

et A est une matrice orthogonale. Notons qu'elle n'est pas symétrique.

Le terme $-\frac{7}{9}$ est l'opposé de son cofacteur, on a donc $\det A = -1$.

A est orthogonalement semblable à une matrice $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

De $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B$, on déduit $-\frac{23}{9} = 2\cos\theta - 1$ et $\cos\theta = -\frac{7}{9}$.

$A + I_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ permet de voir que $w = (0, 1, 1)$ est vecteur propre de A.

Le signe de $\sin\theta$ est celui de $\det(i, Ai, w) = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{8}{9}$. Par suite, $\theta = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{7}{9}\right)$.

A représente la composée (commutative) de la réflexion de plan $w^\perp$ et de la rotation d'angle θ autour de w.

Copyrighted material

2) Posons $V = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Alors $C = \begin{pmatrix} x & z & \alpha' \\ y & t & \beta' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & Y \\ {}^tX & \gamma \end{pmatrix}$ commute avec $B = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ si et seulement si :

$$UV = VU \ , \ {}^tXU = -{}^tX \ , \ UY = -Y.$$

Les deux dernières conditions donnent $X = 0$ et $Y = 0$.

On vérifie que $V = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ commute avec $U = (\cos\theta)I_3 + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si V commute avec $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire si et seulement si $t = x$ et $z = -y$.

Finalement, les matrices qui commutent avec B sont $M = \begin{pmatrix} x & -y & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

Elles forment un sous-espace de dimension 3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Le commutant de A est donc de dimension 3 lui aussi.

Comme (I_3, A, A^2) est une famille libre, il vient que le commutant de A est $\mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$.

Ex. 12

Puisque $\mathcal{SO}(E)$ est un groupe, comme produit de trois rotations, $f = r^{-1} \circ R \circ r$ est une rotation.

- Soit v un vecteur normé, directeur de l'axe de f. $r^{-1} \circ R \circ r(v) = v$ équivaut à $R \circ r(v) = r(v)$, ce qui montre que $r(v)$ est un vecteur directeur (normé) u de R : $v = r^{-1}(u)$.
- Soit α l'angle de f mesuré autour de v. Avec $\mathrm{Tr}\, f = 2\cos\alpha + 1$, $\mathrm{Tr}\, f = \mathrm{Tr}(r^{-1}Rr) = \mathrm{Tr}\, R$ et $\mathrm{Tr}\, R = 2\cos\theta + 1$ où θ désigne l'angle de R mesuré autour de u, il vient $\cos\alpha = \cos\theta$.
- Il reste à examiner si $\sin\alpha$ et $\sin\theta$ ont le même signe ou non.

Soit x non colinéaire à $v = r^{-1}(u)$. Alors $\sin\alpha$ est du signe du produit mixte :

$$[v, x, f(x)] = [r^{-1}(u), r^{-1} \circ r(x), r^{-1} \circ R \circ r(x)] = \left(\det r^{-1}\right)\, [u, r(x), R(r(x))]$$

Or $\det r^{-1} = 1$ et $[u, r(x), R(r(x))]$ a le même signe que $\sin\theta$.

Il s'ensuit que $\sin\alpha$ et $\sin\theta$ ont le même signe et, en conclusion $\alpha = \theta$, à 2π près.

Finalement, si R est une rotation d'angle θ autour de u, alors, pour toute rotation r, $r^{-1} \circ R \circ r$ est la rotation d'angle θ autour de $r^{-1}(u)$.

Ex. 13

L'égalité **(1)** $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ est équivalente à : $\forall u \in E, \langle f(x \wedge y) \,|\, u \rangle = \langle f(x) \wedge f(y) \,|\, u \rangle$.

- Si $f \in \mathcal{SO}(E)$, pour tout $u \in E$, il existe $z \in E$ (unique) tel que $u = f(z)$ donc **(1)** équivaut à **(2)** :

$$\forall z \in E, \langle f(x \wedge y) \,|\, f(z) \rangle = \langle (f(x) \wedge f(y)) \,|\, f(z) \rangle$$

f étant orthogonal, on a $\langle f(x \wedge y) \,|\, f(z) \rangle = \langle (x \wedge y) \,|\, z \rangle = [x, y, z]$, d'autre part :

$$\langle (f(x) \wedge f(y) \,|\, f(z) \rangle = [f(x), f(y), f(z)] = (\det f)[x, y, z].$$

Or, $\det f = 1$ donc **(2)** est vérifiée.

Ainsi, on a montré $f \in \mathcal{SO}(E) \Rightarrow \forall (x, y) \in E^2, f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

- Réciproquement

Soit (i, j, k) une base orthonormale directe de E et $I = f(i)$, $J = f(j)$, $K = f(k)$.

La relation **(1)** avec $k = i \wedge j$ donne $f(k) = f(i) \wedge f(j)$ soit $K = I \wedge J$,

de même, $i = j \wedge k$ et $j = k \wedge i$ donnent $I = J \wedge K$ et $J = K \wedge I$.

Le système (I, J, K) est donc orthogonal, et si l'un de ces trois vecteurs était nul, les deux autres le seraient aussi et on aurait $f = 0$, ce qui est exclu.

Les normes a, b, c de I, J, K vérifient donc $ab = c$, $bc = a$, $ca = b$ avec $abc \neq 0$, d'où on tire $a = b = c = 1$.

Finalement, $(f(i), f(j), f(k))$ est une base orthonormale directe, donc $f \in \mathcal{SO}(E)$.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Par ailleurs, la résolution du système **(1)**, **(2)**, **(3)** montre que g vérifie les conditions **(1)** et **(2)**.

- Dans le deuxième cas, on a : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

donc g est la composée de la réflexion de plan $\mathrm{Vect}(i, j)$ et de la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ autour de $\mathbb{R}k$.

En composant avec l'homothétie de rapport 15, on obtient les deux similitudes solutions du problème.

Niveau 3

Ex. 19

Rappelons que $M \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tMM)}$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera $\mathrm{Tr}({}^tMM) = \| M \|^2$.

- Recherche de conditions nécessaires.

On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est solution de l'équation.

Sachant que $({}^t\mathrm{Com}\, A)A = (\det A)I_n$, on obtient ${}^tAA = \lambda(\det A)I_n$ **(2)**.

Cette égalité impose $\det A \geqslant 0$, en effet ${}^tAA$ est une matrice symétrique réelle positive dont les éléments diagonaux sont les carrés scalaires (dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique) des vecteurs colonnes de A.

Envisageons alors deux cas :

a) $\det A = 0$. L'égalité **(2)** devient : ${}^tAA = 0$ donc $\| A \|^2 = 0$ et $A = 0$.

b) $\det A > 0$.

En prenant le déterminant des deux membres, l'égalité **(2)** donne :

$$(\det A)^2 = \lambda^n (\det A)^n \quad \text{donc} \quad (\det A)^{2-n} = \lambda^n.$$

- si $n = 2$, il reste $\lambda^2 = 1$ donc $\lambda = 1$ et d'après **(1)** $A = \mathrm{Com}\, A$.

Dans ce cas on a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathrm{Com}\, A = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ donc $a = d$, $c = -b$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ soit encore, en posant $k = \sqrt{a^2 + b^2}$, $A = kR$ où R est une matrice de rotation : $R \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

- si $n \geqslant 3$, il vient $\det A = \lambda^{\frac{n}{2-n}}$ et en reportant dans **(2)** : ${}^tAA = \lambda^{\frac{2}{2-n}} I_n$ ou encore, en posant $R = \lambda^{\frac{1}{n-2}} A$:

$${}^tRR = I_n \quad \textbf{(3)}.$$

Avec $\det R = \lambda^{\frac{n}{n-2}} \det A = 1$, la relation **(3)** donne que R est une matrice de rotation, donc :

$$A = \lambda^{\frac{1}{2-n}} R \quad \text{avec} \quad R \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$$

En conclusion, si A est solution de **(1)**, nécessairement :

$$A = 0 \quad \text{ou} \quad A = kR \quad \text{avec} \quad R \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$$

et $k = \lambda^{\frac{1}{2-n}}$ si $n \geqslant 3$, k quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\lambda = 1$ si $n = 2$.

- Conditions suffisantes.

On examine si les matrices précédentes conviennent. Il est clair que la matrice nulle est solution.

Pour $n = 2$,

si $\lambda \neq 1$, le problème n'a pas de solution,

si $\lambda = 1$, toute matrice $A = k \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$ est solution.

Pour $n \geqslant 3$, soit $A = \lambda^{\frac{1}{2-n}} R$ avec $R \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\det A = \lambda^{\frac{n}{2-n}} \det R = \lambda^{\frac{n}{2-n}} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \lambda^{\frac{-1}{2-n}} {}^tR$$

Avec $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} {}^t\mathrm{Com}\, A$, on en déduit $\mathrm{Com}\, A = \lambda^{\frac{n-1}{2-n}} R$ donc :

$$\lambda\, \mathrm{Com}\, A = \lambda^{\frac{1}{2-n}} R = A : A \text{ est solution.}$$

Copyrighted material

Hidden page

Ex. 22

1) On sait qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : ${}^tPAP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A.

L'application $X \mapsto PX$ étant une bijection de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur lui-même, A est positive si et seulement si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t(PX)APX \geqslant 0$$

c'est-à-dire $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXDX \geqslant 0$ soit encore $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant 0$ **(1)**.

En appliquant **(1)** à $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ($i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$) on obtient $\forall i \in [\![1, n]\!], \ \lambda_i \geqslant 0$. La réciproque est évidente donc :

$$\textbf{(1)} \iff \operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$$

2) De même qu'en 1), on obtient que A est définie-positive si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 > 0 \quad \textbf{(2)}$$

Puis en utilisant la base canonique de $\mathbb{R}^n$, il vient : **(2)** $\iff \operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

3) Le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est : $(X, Y) \mapsto \langle X \mid Y \rangle = {}^tXY$.

En conséquence, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : ${}^tX\,{}^tMMX = \| MX \|^2 \geqslant 0$.

${}^tMM$ est définie-positive si et seulement si $MX = 0 \ \Rightarrow \ X = 0$, donc si et seulement si M est inversible.

Ex. 23

1) Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$.

On pose $X = PY$ (ce qui correspond à un changement de base orthonormale dans E muni de sa structure euclidienne canonique), avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ il vient alors :

$${}^tXAX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2, \qquad {}^tXX = {}^tYY = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

Avec $\lambda_1\,{}^tYY - {}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_1 - \lambda_i) y_i^2$, il est clair que :

$$\lambda_1\,{}^tYY - {}^tYDY \geqslant 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda_1\,{}^tXX \geqslant {}^tXAX$$

2) a) Développons le produit ${}^tXAX$:

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} |x_i|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

$i \neq j \ \Rightarrow \ a_{ij} \geqslant 0$ donc $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} |x_i| \, |x_j|$ et ${}^tXAX \leqslant {}^t\overline{X}A\overline{X}$.

b) Soit $X \in E$ un vecteur propre de A associé à λ_1 : $AX = \lambda_1 X$ ou $u(X) = \lambda_1 X$, où u est l'endomorphisme symétrique de E associé à A dans la base canonique.

On a alors : ${}^tXAX = \lambda_1\,{}^tXX$ et ${}^tXAX \leqslant {}^t\overline{X}A\overline{X} \leqslant \lambda_1\,{}^t\overline{X}\,\overline{X}$.

Or ${}^tXX = {}^t\overline{X}\,\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ d'où $\lambda_1\,{}^t\overline{X}\,\overline{X} \leqslant {}^t\overline{X}A\overline{X} \leqslant \lambda_1\,{}^t\overline{X}\,\overline{X}$ et enfin ${}^t\overline{X}A\overline{X} = \lambda_1\,{}^t\overline{X}\,\overline{X}$.

Comme en 1), posons $\overline{X} = PY'$, l'égalité précédente donne : $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_1 - \lambda_i) y_i'^2 = 0$

et puisque pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_1 - \lambda_i$ est positif, il en résulte : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (\lambda_1 - \lambda_i) y_i'^2 = 0$

ce qui équivaut à $y_i' = 0$ pour tout i tel que $\lambda_i \neq \lambda_1$ donc encore à $\overline{X} \in \operatorname{Ker}(u - \lambda_1 \operatorname{Id}_E)$.

Copyrighted material

Ex. 24

1) **Analyse.**

Supposons $A = ST$ avec $S \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure à éléments diagonaux t_{ii} dans $\mathbb{R}_+^*$.

Alors T est inversible et $U = T^{-1}$ est triangulaire supérieure à éléments diagonaux dans $\mathbb{R}_+^*$: $u_{ii} = \dfrac{1}{t_{ii}}$.

La relation $A = ST$ s'écrit aussi $AU = S$.

Interprétons dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique.

La matrice A est inversible, donc c'est la matrice de passage de $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ base canonique à une base $\mathcal{B}' = \left(e_i'\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (constituée des vecteurs colonnes de A) : $A = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

De même, U est inversible. Il existe donc une base $\mathcal{B}'' = \left(e_i''\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ telle que U soit la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}''$: $U = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$.

On a alors $S = AU = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}$: S est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base orthonormale et que S est orthogonale, on en déduit que $\mathcal{B}''$ est une base orthonormale.

Ainsi U est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ base des vecteurs colonnes de A à une base $\mathcal{B}''$ orthonormale. Le fait que U soit triangulaire supérieure équivaut à :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \operatorname{Vect}\left(e_1', \ldots, e_i'\right) = \operatorname{Vect}\left(e_1'', \ldots, e_i''\right) \quad \textbf{(1)}$$

et les conditions $u_{ii} > 0$ donnent : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \left\langle e_i' \,\middle|\, e_i'' \right\rangle > 0$ **(2)**

On en déduit que $\mathcal{B}''$ est l'unique base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ déduite de $\mathcal{B}'$ par le procédé de Schmidt en observant les conditions **(2)**.

Ceci prouve qu'il y a au plus un couple (S, T) solution du problème.

Synthèse.

Par le procédé de Schmidt en respectant les conditions **(2)**, on transforme la base $\mathcal{B}'$ formée des vecteurs colonnes de A en une base $\mathcal{B}''$ orthonormale.

On a $A = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ et en posant $U = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$, on obtient $AU = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}$ avec U triangulaire supérieure et $\forall i \in [\![1, n]\!],\ u_{ii} > 0$. Les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}''$ étant orthonormales, $S = AU$ est orthogonale. Il suffit alors de poser $T = U^{-1}$ pour obtenir $A = ST$ avec $S \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure à éléments diagonaux dans $\mathbb{R}_+^*$.

2) Sachant que S est orthogonale, on a $\det S = \pm 1$, donc :

$$(\det A)^2 = (\det T)^2 = \prod_{j=1}^{n} t_{jj}^2$$

Or $T = P_{\mathcal{B}''\mathcal{B}'}$ donc t_{jj} est la $j^{\text{ème}}$ coordonnée de e_j' sur la base orthonormale $\mathcal{B}''$:

$$t_{jj} = \left\langle e_j'' \,\middle|\, e_j' \right\rangle.$$

Il est donc clair que $\left|t_{jj}\right| \leqslant \| e_j' \|$ d'où : $(\det A)^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n} \| e_j' \|^2$. On conclut en remarquant que :

$$\| e_j' \|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2.$$

Copyrighted material

CHAPITRE

7

Coniques Quadriques

A. Réduction de l'équation d'une conique 304
1. Courbes du second degré 304
2. Équation au centre 304
3. Réduction de la partie quadratique 305
4. Pratique de la réduction 306

B. Quadriques 308
1. Surfaces du second degré 308
2. Équation au centre 309
3. Les quadriques 310

Énoncés des exercices 318

Solutions des exercices 320

Copyrighted material

Remarque : en géométrie, l'auteur s'obstine à noter les vecteurs avec une flèche !

A. Réduction de l'équation d'une conique

1. Courbes du second degré [1]

[1] $\mathscr{E}$ est le plan affine euclidien orienté $\mathbb{R}^2$.

Définition 1

Si, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, une courbe $\mathscr{C}$ admet une équation de la forme $f(x, y) = 0$ où f est un polynôme de degré 2, il en est de même dans tout autre repère. On dit que $\mathscr{C}$ est une courbe du second degré ou par abus de langage que $\mathscr{C}$ est une conique.

On pose $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + k$. [2]

[2] f étant de degré 2, on a $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Avec $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, on écrit aussi $f(x, y) = f(\overrightarrow{OM})$ d'où l'équivalence :

$$M \in \mathscr{C} \iff f(\overrightarrow{OM}) = 0.$$

On note :

- $ax^2 + 2bxy + cy^2 = q(\overrightarrow{OM})$, q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$, on dit que c'est la **partie quadratique** de l'équation.
- $dx + ey = \ell(\overrightarrow{OM})$, ℓ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$, on dit que c'est la **partie linéaire** de l'équation.

Écriture matricielle de l'équation

Posons $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $L = \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

On a alors $q(\overrightarrow{OM}) = {}^tVAV$, $\ell(\overrightarrow{OM}) = {}^tLV$ et l'équation de $\mathscr{C}$ s'écrit :

$${}^tVAV + {}^tLV + k = 0.$$

2. Équation au centre

Soit dans un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathscr{E}$, la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ **(1)**

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + k.$$

Effet d'une translation des axes

Soit $\Omega(x_0, y_0)$, dans le repère $\mathscr{R}' = (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{C}$ a pour équation :

$$f(x_0 + x', y_0 + y') = 0.$$

On vérifie que :

$$f(x_0 + x', y_0 + y') = ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + x'\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y'\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + f(x_0, y_0).$$

La partie quadratique de l'équation est donc invariante par translation des axes.

Copyrighted material

Recherche d'un centre de $\mathscr{C}$

Principe : Ω est centre de symétrie de $\mathscr{C}$ si et seulement si la partie linéaire de l'équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $\mathscr{R}'$ est nulle.

Cette condition équivaut à :

$$\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2,\ f(x_0 + x', y_0 + y') = f(x_0 - x', y_0 - y').$$

Conséquence

$\Omega(x_0, y_0)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + \dfrac{1}{2}d = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = bx_0 + cy_0 + \dfrac{1}{2}e = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire, en posant $V_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$: si et seulement si $AV_0 + \dfrac{1}{2}L = 0$.

Théorème 1

Si $\operatorname{rg} A = 2$, la courbe $\mathscr{C}$ a un centre de symétrie $\Omega(x_0, y_0)$ et un seul. (3)

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{C}$ a pour équation :

$$ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + f(x_0, y_0) = 0. \qquad (2)$$

(3) Si $\operatorname{rg} A = 1$, $\mathscr{C}$ peut ne pas avoir de centre de symétrie, ou en avoir une infinité.

Théorème 2

On suppose que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal de $\mathbb{R}^2$, alors $\Omega(x_0, y_0)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$ si et seulement si : $\overrightarrow{\operatorname{grad} f}(x_0, y_0) = 0$.

Définition 2

Lorsque le centre existe, l'équation (2) est appelée **équation au centre** de $\mathscr{C}$.

3. Réduction de la partie quadratique

Le repère initial $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est maintenant supposé orthonormal.

On sait qu'il existe $P \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ (4) telle que : ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = D$.

(4) Matrice de rotation.

P est matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j})$ à une base orthonormale $(\vec{I}, \vec{J})$ de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de l'endomorphisme symétrique de la forme quadratique q.

Les formules de changement de repère de $(O, \vec{i}, \vec{j})$ à $(O, \vec{I}, \vec{J})$ s'écrivent :

$$V = PV'' \quad \text{avec} \quad V'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

Dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$, $\mathscr{C}$ a pour équation ${}^tV''DV'' + {}^tLPV'' + k = 0$ c'est-à-dire

$$\lambda x''^2 + \mu y''^2 + d_1 x'' + e_1 y'' + k = 0. \qquad (3)$$

(5) Par rotation des axes, on fait disparaître le «terme rectangle» de la partie quadratique.

Remarques

1) Le terme constant de l'équation est invariant par rotation des axes.

2) Si $\operatorname{rg} A = 2$, λ et μ sont non nuls, de même signe lorsque $\det A = ac - b^2 > 0$, de signes contraires lorsque $\det A = ac - b^2 < 0$.

Si $\operatorname{rg} A = 1$, l'une des valeurs propres λ, μ est nulle, l'autre est non nulle. (6)

(6) Sinon on aurait $A = 0$.

Copyrighted material

4. Pratique de la réduction

1) Calculer rg A.

2) Dans le cas où rg $A = 2$,

✎ (7) Équation au centre.

a) déterminer le centre Ω et former l'équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$: ✎ (7)

$$^tV'AV' + f(x_0, y_0) = 0 ;$$

b) diagonaliser A dans le groupe orthogonal pour trouver un repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ dans lequel $\mathscr{C}$ a pour équation : $\lambda x''^2 + \mu y''^2 + f(x_0, y_0) = 0$.

3) Dans le cas où rg $A = 1$,

a) diagonaliser A dans le groupe orthogonal pour trouver un repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ dans lequel $\mathscr{C}$ a pour équation : $\lambda x''^2 + d_1 x'' + e_1 y'' + k = 0$;

Remarque

✎ (8) Éventuellement à un changement de signe près.

✎ (8) La partie quadratique de l'équation **(1)** est alors un carré parfait :

$$q(\overrightarrow{OM}) = \varepsilon(\alpha x + \beta y)^2$$

donc $q(\overrightarrow{OM}) = \lambda \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} x + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} y \right)^2$ avec $\lambda = \varepsilon (\alpha^2 + \beta^2)$.

On peut donc, pour obtenir l'équation souhaitée, effectuer la rotation des axes définie par :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b) opérer une translation des axes pour simplifier la partie linéaire, l'équation précédente s'écrivant : $\lambda \left(x'' + \frac{d_1}{2\lambda} \right)^2 + e_1 y'' + k - \frac{d_1^2}{4\lambda} = 0$.

La translation des axes définie par $x' = x'' + \frac{d_1}{2\lambda}$, $y' = y''$ donne pour équation de $\mathscr{C}$ dans le nouveau repère : $\lambda x'^2 + e_1 y' + k_1 = 0 \qquad \left(k_1 = k - \frac{d_1^2}{4\lambda} \right)$.

Type d'une courbe $\mathscr{C}$ du second degré

✎ (9) La discussion se fait sur les équations réduites précédentes.

Soit $\mathscr{C}$ la conique d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + d'y + e = 0$. ✎ (9)

- Si $ac - b^2 > 0$, on dit que $\mathscr{C}$ est du **type ellipse**.
- Si $ac - b^2 < 0$, on dit que $\mathscr{C}$ est du **type hyperbole**.
- Si $ac - b^2 = 0$, on dit que $\mathscr{C}$ est du **type parabole**.

Nature de $\mathscr{C}$ suivant son équation réduite

On dénombre neuf cas possibles.

Ils sont présentés dans le tableau ci-après.

Copyrighted material

Hidden page

Exemple 2 Mêmes questions pour $\mathscr{C}$: $x^2 + 6xy + y^2 + 4x = 0$.

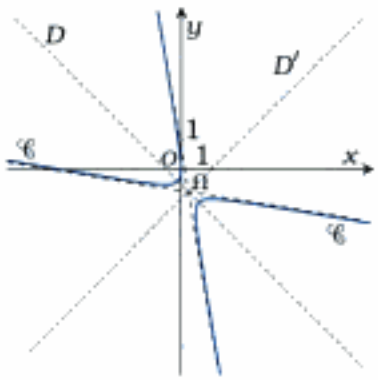
On a ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = -8$, donc $\mathscr{C}$ est du type hyperbole.

Le polynôme caractéristique de A est :

$$t^2 - 2t - 8 = (t-4)(t+2).$$

Une base orthonormale formée de vecteurs propres de A est $(\vec{I}, \vec{J})$:

$$\vec{I} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} \quad , \quad \vec{J} = \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}.$$



Avec $\begin{cases} x + y = X\sqrt{2} \\ -x + y = Y\sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x\sqrt{2} = X - Y \\ y\sqrt{2} = X + Y \end{cases}$

l'équation de $\mathscr{C}$ dans $(O, \vec{I}, \vec{J})$ est $4X^2 - 2Y^2 + 2\sqrt{2}(X - Y) = 0$, soit :

$$4\left(X + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2\left(Y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0.$$

Il s'agit d'une hyperbole.

Le centre Ω est défini par $X = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $Y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \frac{1}{4}$, $y = -\frac{3}{4}$.

L'axe focal est D : $x + y + \frac{1}{2} = 0$, l'axe non focal D' : $-x + y + 1 = 0$.

B. Quadriques

1. Surfaces du second degré

(11) $\mathscr{E}$ est maintenant l'espace usuel affine euclidien orienté $\mathbb{R}^3$.

Définition 3

Si dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, une surface $\mathscr{S}$ admet une équation de la forme $f(x, y, z) = 0$ où f est un polynôme de degré 2, il en est de même dans tout autre repère. On dit que $\mathscr{S}$ est une **surface du second degré** ou par abus de langage que $\mathscr{S}$ est une **quadrique**.

On pose $f(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2bxy + 2b'yz + 2b''zx + cx + c'y + c''z + k$.

Avec $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, on écrit aussi $f(x, y, z) = f\left(\overrightarrow{OM}\right)$ d'où l'équivalence :

$$M \in \mathscr{S} \iff f\left(\overrightarrow{OM}\right) = 0$$

On note :

- $ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2bxy + 2b'yz + 2b''zx = q\left(\overrightarrow{OM}\right)$: q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$, on dit que c'est la **partie quadratique** de l'équation.
- $cx + c'y + c''z = \ell\left(\overrightarrow{OM}\right)$: ℓ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, on dit que c'est la **partie linéaire** de l'équation.

Copyrighted material

Écriture matricielle de l'équation

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ A = \begin{pmatrix} a & b & b'' \\ b & a' & b' \\ b'' & b' & a'' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ L = \begin{pmatrix} c \\ c' \\ c'' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

On a alors $q\left(\overrightarrow{OM}\right) = {}^tVAV$, $\ell\left(\overrightarrow{OM}\right) = {}^tLV$ et l'équation de $\mathcal{S}$ s'écrit :

$${}^tVAV + {}^tLV + k = 0.$$

Réduction de la partie quadratique par rotation des axes

Il existe une base orthonormale $\left(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ formée de vecteurs propres de l'endomorphisme symétrique associé à q.

Avec $\overrightarrow{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$ on a alors $q\left(\overrightarrow{OM}\right) = \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2$.

Dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, $\mathcal{S}$ a pour équation :

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z + k = 0.$$

2. Équation au centre

✎ (12) On dit que Ω est un **centre de la quadrique**.

Le point Ω est centre de symétrie de la surface $\mathcal{S}$: $f(x, y, z) = 0$ si : ✎ (12)

$$f\left(\Omega + \overrightarrow{\Omega M}\right) = 0 \iff f\left(\Omega - \overrightarrow{\Omega M}\right) = 0 \quad (M \text{ désigne un point de } \mathcal{E}).$$

Équation au centre $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ de la surface $\mathcal{S}$

- Dans $\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, $\mathcal{S}$: $q\left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\right) + f\left(x_0, y_0, z_0\right) = 0$.
- Dans $\left(\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$, $\mathcal{S}$: $\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 + \delta = 0$.

Si $\Omega \in \mathcal{S}$, alors $\mathcal{S}$ est un cône de sommet Ω.

Détermination du centre

Les coordonnées (x, y, z) d'un centre vérifient le système :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x} = ax + by + b''z + \dfrac{1}{2}c = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y} = bx + a'y + b'z + \dfrac{1}{2}c' = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial z} = b''x + b'y + a''z + \dfrac{1}{2}c'' = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire } A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c \\ c' \\ c'' \end{pmatrix} = 0. \text{ ✎ (13)}$$

✎ (13) Ou encore $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y,z) = 0$.

Discussion du système

- $\operatorname{rg} A = 3$, $\mathcal{S}$ a un centre unique ;
- $\operatorname{rg} A = 2$, l'ensemble des centres est une droite ou l'ensemble vide ;
- $\operatorname{rg} A = 1$, l'ensemble des centres est un plan ou l'ensemble vide.

Copyrighted material

Hidden page

Exemple 3 Nature de la surface $\mathcal{S}_a$ d'équation :

$$x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 4xy - 2xz - 2y - 6z = a. \qquad (1)$$

dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Formons la matrice A de la partie quadratique.

Avec $q(\overrightarrow{OM}) = x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 2zx + 4xy$, il vient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une quadrique à centre, le problème revient à la détermination du signe des valeurs propres de A.

Le calcul donne $\det A = -1$ donc A est inversible et $\mathcal{S}_a$ admet un unique centre de symétrie Ω défini par le système :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 5y = 1 \\ -x + 4z = 3 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ce qui donne $x = -7,\ y = 3,\ z = -1$.

L'équation au centre de $\mathcal{S}_a$ s'obtient en effectuant la translation des axes définie par $x = -7+X$, $y = 3 + Y$, $z = -1 + Z$ ce qui donne :

$$X^2 + 5Y^2 + 4Z^2 - 2ZX + 4XY = a \text{ ✎ (17)} \qquad (2)$$

✎ (17) Équation de $\mathcal{S}_a$ dans le repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

Formons maintenant le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 24\lambda - 1.$$

On sait que χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$ mais il n'y a pas de factorisation simple apparente.

Avec $\chi'_A(\lambda) = -3\lambda^2 + 20\lambda - 24$, on vérifie que χ_A n'a pas de racine double. En effet, si λ était racine double de χ_A on aurait successivement :

$$\begin{cases} 3\lambda^2 - 20\lambda + 24 = 0 & (E_1) \\ -3\lambda^3 + 10\lambda^2 - 24\lambda - 1 = 0 & (E_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\lambda^2 - 20\lambda + 24 = 0 & (E_1) \\ 10\lambda^2 - 48\lambda - 3 = 0 & (E_3) \text{ ✎ (18)} \end{cases}$$

✎ (18) $(E_3) = \lambda(E_1) + 3(E_2)$

$$\begin{cases} 3\lambda^2 - 20\lambda + 24 = 0 & (E_1) \\ 56\lambda = 249 & (E_4) \text{ ✎ (19)} \end{cases}$$

✎ (19) $(E_4) = -10(E_1) + 3(E_3)$

et il est facile de voir que ce dernier système n'a pas de solution puisque les racines de χ'_A sont :

$$\frac{10 - 2\sqrt{7}}{3} \quad \text{et} \quad \frac{10 + 2\sqrt{7}}{3}.$$

En conséquence, χ_A a trois racines réelles simples $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et on les indexe de façon que :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3. \text{ ✎ (20)}$$

✎ (20) Le calcul numérique donne :
$\lambda_1 \simeq -0{,}04$
$\lambda_2 \simeq 4{,}13$
$\lambda_3 \simeq 5{,}91$.

Avec $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$, les possibilités sont $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$ et $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ et, compte tenu de $\operatorname{Tr} A = 10 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, seule la première est à retenir.

Posons donc $\lambda_1 = -\frac{1}{\alpha^2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{\beta^2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{\gamma^2}$. Si $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base orthonormale formée de vecteurs propres de u_A, endomorphisme symétrique associé à A dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec :

$$u_A(\vec{I}) = \lambda_1 \vec{I},\ u_A(\vec{J}) = \lambda_2 \vec{J},\ u_A(\vec{K}) = \lambda_3 \vec{K},$$

Copyrighted material

dans le repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ $\mathscr{S}_a$ a pour équation :

$$-\frac{X'^2}{\alpha^2} + \frac{Y'^2}{\beta^2} + \frac{Z'^2}{\gamma^2} = a \qquad (3)$$

d'où la nature de $\mathscr{S}_a$:

$a > 0$: hyperboloïde à une nappe ;

$a < 0$: hyperboloïde à deux nappes ;

$a = 0$: cône de sommet A.

Exemple 4 Nature et équation réduite de la surface $\mathscr{S}_a$ d'équation :

$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4xy - 10yz - 4zx + 6ax + 3ay - 5az + a^2 = 0 \qquad (1)$$

dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On a ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ d'où $\det A = 0$ et $\mathscr{S}_a$ n'est pas une quadrique à centre.

Commençons par réduire la partie quadratique.

On trouve $\chi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda + 2)(\lambda - 9)$ et une base orthonormale de vecteurs propres est $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ avec :

$$\vec{I} = \frac{1}{3}(\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) \quad \text{associé à la valeur propre } 9$$

$$\vec{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} + \vec{k}) \quad \text{associé à } -2$$

$$\vec{K} = \frac{\sqrt{2}}{6}(4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \quad \text{associé à } 0$$

On écrit l'équation de $\mathscr{S}_a$ dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ en opérant la rotation des axes définie par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \text{ avec } P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4\sqrt{2} \\ 4 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -4 & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

On obtient : $9X^2 - 2Y^2 + \frac{22}{3}aX - a\sqrt{2}Y + \frac{8}{3}a\sqrt{2}Z + a^2 = 0.$ (2)

Sous cette forme on voit que, si $a = 0$, l'équation devient $9X^2 - 2Y^2 = 0$, et $\mathscr{S}_0$ est la réunion des deux plans sécants $\Pi_1 : 3X - Y\sqrt{2} = 0$ et $\Pi_2 : 3X + Y\sqrt{2} = 0$.

Pour $a \neq 0$, l'équation réduite (après translation des axes) va être :

$$9U^2 - 2V^2 + \frac{8}{3}a\sqrt{2}W = 0$$

et $\mathscr{S}_a$ est donc un paraboloïde hyperbolique.

Pour expliciter cette translation, on écrit l'équation (2) sous la forme :

$$9\left(X + \frac{11}{27}a\right)^2 - 2\left(Y + \frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2 + \frac{8a\sqrt{2}}{3}\left(Z - \frac{79a}{864\sqrt{2}}\right) = 0.$$

La translation est donc définie par :

$$X = U - \frac{11}{27}a$$

$$Y = V - \frac{\sqrt{2}}{4}a$$

$$W = Z + \frac{79a}{864\sqrt{2}}$$

et l'origine du repère de réduction a pour coordonnées :

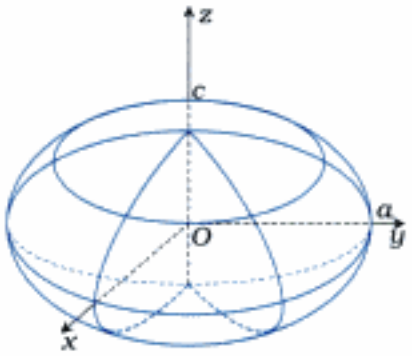
$$\left(-\frac{11}{27}a, -\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{79a}{864\sqrt{2}}\right) \text{ dans } (O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}).$$

Copyrighted material

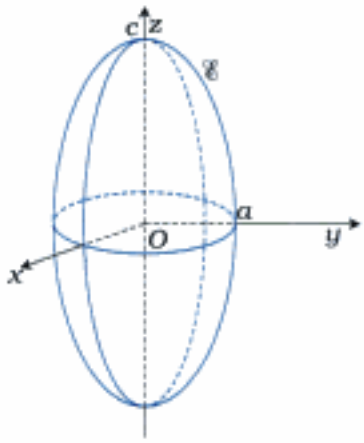
3.2 – Les quadriques de révolution

Ellipsoïde de révolution $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$ (21)

(21) L'ellipsoïde de révolution est engendré par une ellipse $\mathscr{E}$: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$, $x=0$ tournant autour d'un de ses axes (ici Oz).



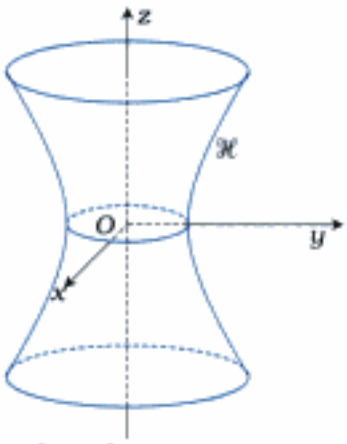
Ellipsoïde plat si $a > c$



Ellipsoïde long si $a < c$

Hyperboloïde de révolution (22)

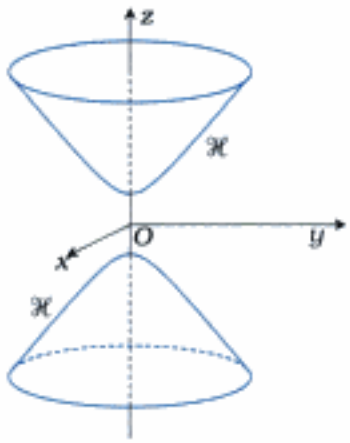
(22) La section d'un hyperboloïde de révolution par un plan orthogonal à l'axe et passant par le centre est vide si l'hyperboloïde a deux nappes.



à une nappe $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$

engendré par l'hyperbole $\mathscr{H}$:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0\ ,\quad x=0$$



à deux nappes $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}+1=0$

engendré par l'hyperbole $\mathscr{H}$:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0\ ,\quad x=0$$

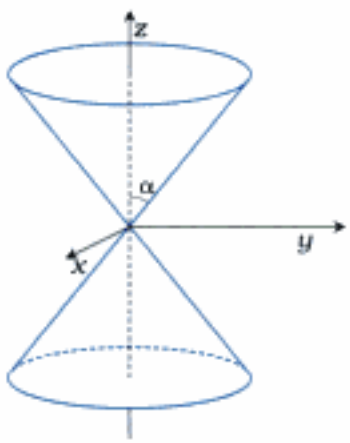
Cône de révolution $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$

ou $x^2+y^2-z^2\tan^2\alpha=0$

engendré par la droite $\mathscr{D}$:

$$z=\frac{c}{a}y\ ,\quad x=0$$

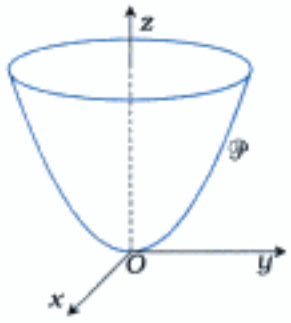
$\mathscr{C}$ est le cône de révolution d'axe Oz de demi-angle au sommet α.



Copyrighted material

Paraboloïde de révolution $x^2 + y^2 - 2pz = 0$

engendré par la parabole $\mathcal{P}$:
$y^2 - 2pz = 0$, $x = 0$



Cylindre de révolution $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ d'axe Oz et de rayon a.

Les quadriques propres ne pouvant pas être de révolution sont :
le paraboloïde hyperbolique, le cylindre hyperbolique ou parabolique.

Théorème 3

Caractérisation d'une quadrique de révolution

Soit $\mathcal{S}$ une quadrique propre dont la forme quadratique associée a pour matrice A dans une base orthonormale.

Alors $\mathcal{S}$ est de révolution si et seulement si A a une valeur propre double non nulle. (23)

(23) Le cas d'une valeur propre triple est celui de la sphère exclusivement.

Théorème 4

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ a une valeur propre double si et seulement si il existe un réel λ tel que :
$$\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) = 1.$$

☞ L'image de $A - \lambda I_3$ donne la direction de l'axe de la quadrique de révolution éventuelle.

Exemple 5 Éléments de la surface de révolution $\mathcal{S}$ d'équation : $3x^2 + 8yz + 4zx - 4xy + y + z = 0$ **(1)** dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Introduisons la matrice A de la forme quadratique associée à $\mathcal{S}$: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -\lambda \end{pmatrix}$ et $\det(A - \lambda I_3) = -(\lambda + 5)(\lambda - 4)^2$.

Pour $\lambda = 4$, on a $\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) = 1$ (24) et, avec $A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} = B$,

on obtient $(x\ y\ z)\, B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -(x + 2y - 2z)^2$.

(24) A étant diagonalisable et 4 valeur propre double,
$2 = 3 - \operatorname{rg}(A - 4I_3)$.

Comme $A = 4I_3 + B$, l'équation de **(1)** s'écrit : $4(x^2 + y^2 + z^2) - (x + 2y - 2z)^2 + y + z = 0$.

Choisissons un repère orthonormal $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ avec $\vec{K} = \dfrac{\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{3}$, en prenant

pour nouvelles coordonnées : $\begin{cases} X = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z) \\ Y = \frac{1}{3}(2x + y + 2z) \\ Z = \frac{1}{3}(x + 2y - 2z) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x = \frac{1}{3}(-2X + 2Y + Z) \\ y = \frac{1}{3}(2X + Y + 2Z) \\ z = \frac{1}{3}(X + 2Y - 2Z) \end{cases}$

Les formules inverses sont identiques car la matrice est orthogonale et symétrique. Calculons $y + z = X + Y$ pour obtenir l'équation de $\mathcal{S}$ dans $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$:

$$4(X^2 + Y^2 + Z^2) - 9Z^2 + X + Y = 0,\ 4\left(X + \frac{1}{8}\right)^2 + 4\left(Y + \frac{1}{8}\right)^2 - 5Z^2 - \frac{1}{8} = 0 \quad \textbf{(2)}$$

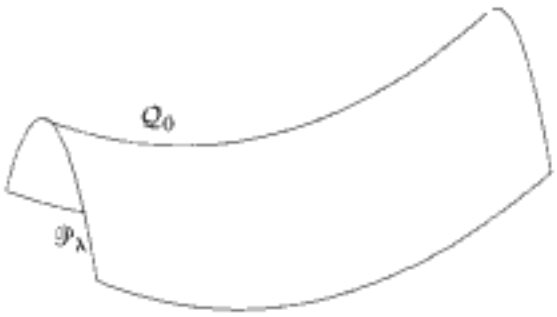
$\mathcal{S}$ est un hyperboloïde de révolution à une nappe, de centre $\Omega = O - \frac{1}{8}(\vec{I} + \vec{J}) = O - \frac{1}{8}(\vec{j} + \vec{k})$

et d'axe $\Delta = \Omega + \mathbb{R}\vec{K}$.

Copyrighted material

Hidden page

L'ensemble des sommets des $\mathcal{P}_\lambda$ est la parabole $\mathcal{D}_0$. Ceci permet de préciser la forme du $\mathcal{PH}$.



3.4 – Paramétrage des quadriques ✎ (26)

✎ (26) Les quadriques de révolution se décrivent à l'aide d'un paramétrage d'une méridienne. Le cas général s'obtient par affinité.

▪ **Ellipsoïde**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 : (\varphi,\theta)\mapsto\begin{cases}x=a\cos\varphi\cos\theta\\ y=b\cos\varphi\sin\theta\\ z=c\sin\varphi\end{cases}$$

Les lignes coordonnées sont des ellipses.

▪ **Hyperboloïde à une nappe**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 : (\varphi,\theta)\mapsto\begin{cases}x=a\,\mathrm{ch}\,\varphi\cos\theta\\ y=b\,\mathrm{ch}\,\varphi\sin\theta\\ z=c\,\mathrm{sh}\,\varphi\end{cases}$$

Les lignes coordonnées sont des hyperboles (θ constant), des ellipses (φ constant).

Un autre paramétrage s'obtient à partir des droites qui l'engendrent.

▪ **Hyperboloïde à deux nappes**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0 : (\varphi,\theta)\mapsto\begin{cases}x=a\,\mathrm{sh}\,\varphi\cos\theta\\ y=b\,\mathrm{sh}\,\varphi\sin\theta\\ z=\varepsilon c\,\mathrm{ch}\,\varphi\end{cases}$$

avec $\varepsilon=1$ pour la nappe $(z\geqslant c)$ et $\varepsilon=-1$ pour la nappe $(z\leqslant -c)$.

▪ **Cône du second degré**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 : (\lambda,\theta)\mapsto\begin{cases}x=a\lambda\cos\theta\\ y=b\lambda\sin\theta\\ z=c\lambda\end{cases}$$

Les lignes coordonnées sont des ellipses (λ constant) et des droites (θ constant).

3.5 – Les quadriques réglées

▪ Une surface est dite **réglée** lorsqu'elle est engendrée par une famille de droites qui sont alors appelées des **génératrices**.

▪ Les cônes et les cylindres sont naturellement des surfaces réglées. Le paraboloïde hyperbolique et l'hyperboloïde à une nappe sont aussi des surfaces réglées. Chacune est engendrée par deux familles de droites.

▪ **Paraboloïde hyperbolique** : (voir l'étude particulière).

▪ **Hyperboloïde à une nappe** : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

– En écrivant l'équation $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y^2}{b^2}$, on voit apparaître deux systèmes de génératrices :

$$\mathcal{D}_\lambda \;:\; \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)\quad,\quad \lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=1+\frac{y}{b}$$

$$\mathcal{D}'_\mu \;:\; \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right)\quad,\quad \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b}$$

– En coupant l'hyperboloïde par les plans tangents le long de l'ellipse :

$$\mathcal{E} \;:\; z=0\quad,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Copyrighted material

on voit aussi apparaître deux systèmes de génératrices :

$$\Delta_\theta \quad : \quad \frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1 \quad . \quad \frac{z}{c} = \frac{x}{a}\sin\theta - \frac{y}{b}\cos\theta \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

$$\Delta'_\theta \quad : \quad \frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1 \quad . \quad \frac{z}{c} = -\frac{x}{a}\sin\theta + \frac{y}{b}\cos\theta \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

☞ Détaillons ce calcul.

L'ellipse $\mathscr{E}$ est paramétrée par $\theta \mapsto M(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

avec $M(\theta) = O + a\cos\theta\,\vec{i} + b\sin\theta\,\vec{j}$ et on sait que le plan tangent à $\mathscr{H}$ en un point $M_0(x_0 . y_0 . z_0)$ a pour équation :

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

(voir l'étude de différentielle des surfaces dans le tome d'Analyse, MP).

Donc le plan tangent à $\mathscr{H}$ en $M(\theta) \in \mathscr{E}$ est :

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$$

et $\mathscr{H} \cap P(\theta)$ est définie par le système :

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1 \quad . \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = \frac{z^2}{c^2}$$

équivalent à :

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1 \quad . \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \left(\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta\right)^2 = \frac{z^2}{c^2}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1 \quad . \quad \left(\frac{x}{a}\sin\theta - \frac{y}{b}\sin\theta\right)^2 = \frac{z^2}{c^2}$$

On en déduit que $\mathscr{H} \cap P(\theta)$ est constituée des deux droites Δ_θ et Δ'_θ donc que :

$$\bigcup_{\theta\in[0,2\pi[} \Delta_\theta \subset \mathscr{H} \text{ et } \bigcup_{\theta\in[0,2\pi[} \Delta'_\theta \subset \mathscr{H}.$$

Réciproquement, montrons que $\mathscr{H} \subset \bigcup_{\theta\in[0,2\pi[} \Delta_\theta$.

Soit $M(x, y, z) \in \mathscr{H}$ donc tel que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}$.

Le système (S) : $\begin{cases} u\frac{x}{a} + v\frac{v}{b} = 1 \\ -u\frac{y}{b} + v\frac{x}{a} = -\frac{z}{c} \end{cases}$ a pour déterminant $D = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 0$, il admet donc une solution et une seule :

$$(u, v) = \left(\frac{1}{D}\left(\frac{x}{a} + \frac{yz}{bc}\right) . \frac{1}{D}\left(\frac{y}{b} - \frac{xz}{ac}\right)\right).$$

Le calcul donne alors :

$$U^2 + v^2 = \frac{1}{D^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right) = 1,$$

donc il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $u = \cos\theta$, $v = \sin\theta$ et, en écrivant que $(\cos\theta, \sin\theta)$ est solution de (S), on obtient $M \in \Delta_\theta$.

Ceci nous donne $\mathscr{H} \subset \bigcup_{\theta\in[0,2\pi[} \Delta_\theta$ d'où finalement $\mathscr{H} = \bigcup_{\theta\in[0,2\pi[} \Delta_\theta$.

En remarquant que Δ'_θ est l'image de Δ_θ par la réflexion de plan xOy et que $\mathscr{H}$ est invariant par cette réflexion, on a de même $\mathscr{H} = \bigcup_{\theta\in[0,2\pi[} \Delta'_\theta$.

▪ Les autres quadriques : ellipsoïde, hyperboloïde à deux nappes et paraboloïde elliptique, ne contiennent pas de droites.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Ex. 2

▪ Remarquons d'abord que tout point M du cercle Γ, circonscrit au triangle ABC, convient, les deux cercles MAB et MBC étant alors identiques.

▪ Choisissons un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan tel que les coordonnées des points B, A, C soient respectivement : (a, b), $(a, -b)$, $(-a, b)$.

Soit $P(\alpha, 0)$ et $Q(0, \beta)$ les centres de deux cercles, l'un contenant $\{A, B\}$, l'autre contenant $\{B, C\}$; ils ont même rayon si et seulement si :

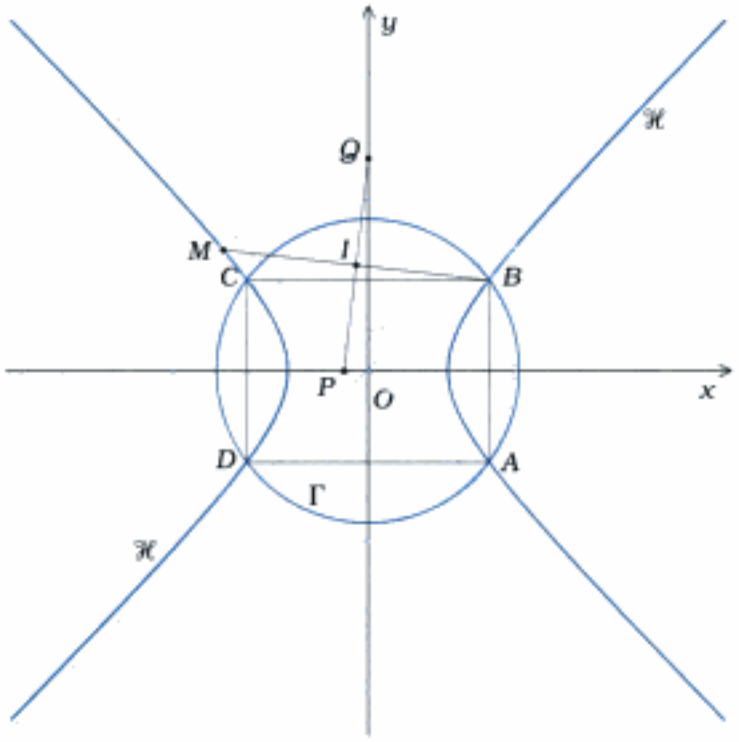
$$\| \overrightarrow{BP} \|^2 = \| \overrightarrow{BQ} \|^2 \iff (\alpha - a)^2 + b^2 = a^2 + (\beta - b)^2.$$

S'ils ne sont pas confondus $\big((\alpha, \beta) \neq (0, 0)\big)$ ces cercles se recoupent en un point $M(x, y)$ symétrique de B par rapport au milieu I de PQ et on a alors : $x + a = \alpha$, $y + b = \beta$.

En conséquence, les deux cercles ont même rayon si et seulement si $x^2 + b^2 = a^2 + y^2$.

C'est l'équation d'une hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ de centre O, d'axes Ox et Oy circonscrite au rectangle $ABCD$.

Le lieu cherché est la réunion $L = \Gamma \cup \mathcal{H}$.



Ex. 3

Soit $(F, \vec{i}, \vec{j})$ le repère orthonormal tel que $A = F + a\vec{i}$.

Une hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ de foyer F a pour équation polaire :

$$r = \frac{p}{1 + \sqrt{2}\cos(\theta - \theta_0)}.$$

$\mathcal{H}$ contient A si et seulement si $a = \dfrac{p}{1 + \sqrt{2}\cos\theta_0}$ ou $-a = \dfrac{p}{1 - \sqrt{2}\cos\theta_0}$ c'est-à-dire :

$$p = a\left(1 + \sqrt{2}\cos\theta_0\right) \text{ ou } p = -a\left(1 - \sqrt{2}\cos\theta_0\right).$$

Les sommets S et S' de $\mathcal{H}$ ont donc pour coordonnées polaires :

Copyrighted material

- pour S :

$$\theta = \theta_0 \quad , \quad r = \frac{p}{1+\sqrt{2}}$$

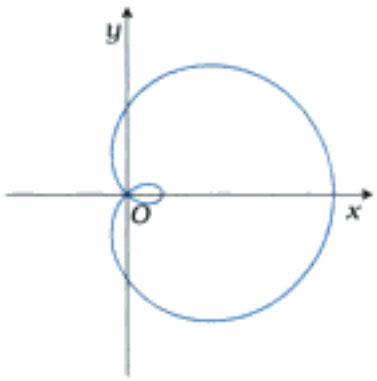
- pour S' :

$$\theta = \theta_0 + \pi \quad , \quad r = \frac{p}{1-\sqrt{2}}$$

$$\text{ou} \quad \theta = \theta_0 \quad , \quad r = \frac{p}{\sqrt{2}-1}$$

et, pour le centre Ω :

$$\theta = \theta_0 \quad , \quad r = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) = p\sqrt{2}.$$



L'ensemble $\mathscr{L}$ cherché a donc pour équation polaire : $r = 2a\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\theta\right)$ ou $r = -2a\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\theta\right)$.

Or, en posant $f(\theta) = 2a\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\theta\right)$ et $g(\theta) = -2a\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\theta\right)$, on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $g(\theta+\pi) = -f(\theta)$, donc les équations $r = f(\theta)$ et $r = g(\theta)$ représentent la même courbe.

Finalement, l'ensemble $\mathscr{L}$ cherché est le limaçon de Pascal d'équation polaire $r = 2a\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\theta\right)$.

Ex. 4

On choisit le repère orthonormal tel que A soit l'origine et l'axe des abscisses soit porté par $\mathscr{D}$. Le point B a alors pour coordonnées (a, b) avec $b \neq 0$.

La conique $\mathscr{C}$ d'équation :

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \lambda = 0 \qquad (1)$$

est une hyperbole équilatère ou un ensemble de deux droites orthogonales si et seulement si les valeurs propres de la matrice de la partie quadratique sont opposées donc si et seulement si la trace de cette matrice est nulle, c'est-à-dire $\alpha + \gamma = 0$.

On a alors $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$$

et l'équation (1) s'écrit : $\left(x^2 - y^2\right)\cos\theta - 2xy\sin\theta + ux + vy + w = 0$, où on a posé :

$$\frac{\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = u, \quad \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = v \text{ et } \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = w.$$

$\mathscr{C}$ est tangente en A à $\mathscr{D}$ si et seulement si $w = u = 0$.

On a ainsi l'équation générale des hyperboles équilatères tangentes en A à $\mathscr{D}$:

$$\left(x^2 - y^2\right)\cos\theta - 2xy\sin\theta + vy = 0.$$

On écrit que $\mathscr{C}$ passe par $B(a, b)$ et il vient : $v = \dfrac{\left(b^2 - a^2\right)\cos\theta + 2ab\sin\theta}{b}$.

Le centre $\Omega\left(x_0, y_0\right)$ est défini par :

$$\begin{cases} x_0\cos\theta - y_0\sin\theta = 0 \\ x_0\sin\theta + y_0\cos\theta = \dfrac{v}{2} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{v}{2}\sin\theta \\ y_0 = \dfrac{v}{2}\cos\theta \end{cases}$$

puis :

$$x_0 = \frac{1}{2b}\left[\left(b^2 - a^2\right)\cos\theta\sin\theta + 2ab\sin^2\theta\right]$$

$$y_0 = \frac{1}{2b}\left[\left(b^2 - a^2\right)\cos^2\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta\right]$$

Copyrighted material

soit encore :

$$x_0 = \frac{1}{4b}\left[\left(b^2 - a^2\right)\sin 2\theta + 2ab(1 - \cos 2\theta)\right]$$

$$y_0 = \frac{1}{4b}\left[\left(b^2 - a^2\right)(1 + \cos 2\theta) + 2ab\sin 2\theta\right]$$

En résolvant ce système en $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$, on en déduit que $M(x, y)$ appartient à l'ensemble $\mathscr{L}$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\cos 2\theta = \frac{4b}{\left(a^2 + b^2\right)^2}\left[-2ab\left(x - \frac{a}{2}\right) + \left(b^2 - a^2\right)\left(y - \frac{b^2 - a^2}{4b}\right)\right]$$

$$\sin 2\theta = \frac{4b}{\left(a^2 + b^2\right)^2}\left[\left(b^2 - a^2\right)\left(x - \frac{a}{2}\right) + 2ab\left(y - \frac{b^2 - a^2}{4b}\right)\right]$$

donc si et seulement si :

$$\frac{16b^2}{\left(a^2 + b^2\right)^2}\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b^2 - a^2}{4b}\right)^2\right] = 1.$$

L'ensemble $\mathscr{L}$ est donc le cercle d'équation :

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b^2 - a^2}{4b}\right)^2 = \frac{\left(a^2 + b^2\right)^2}{16b^2}.$$

Ex. 5

On suppose bien sûr $(a, b, a', b') \neq (0, 0, 0, 0)$, c'est-à-dire $a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 > 0$.

Soit q et q' les formes quadratiques définies dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ par :

$$q(x, y) = (ax + by)^2 + \left(a'x + b'y\right)^2 \quad , \quad q'(x, y) = (ax + a'y)^2 + \left(bx + b'y\right)^2.$$

Les matrices A et A' de q et q', par rapport à $(\vec{i}, \vec{j})$ sont :

$$A = \begin{bmatrix} a^2 + a'^2 & ab + a'b' \\ ab + a'b' & b^2 + b'^2 \end{bmatrix} \quad , \quad A' = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & aa' + bb' \\ aa' + bb' & a'^2 + b'^2 \end{bmatrix}$$

Leurs polynômes caractéristiques sont identiques.

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda\left(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2\right) + \left(a^2 + a'^2\right)\left(b^2 + b'^2\right) - \left(ab + a'b'\right)^2$$

$$= \lambda^2 - \lambda\left(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2\right) + a^2b'^2 + a'^2b^2 - 2aa'bb'$$

Il vient alors $\chi_{A'}(\lambda) = \chi_A(\lambda)$: en effet il suffit de permuter a' et b dans $\chi_A(\lambda)$ pour obtenir $\chi_{A'}(\lambda)$.
A et A' ont donc même couple (α, β) de valeurs propres.

En conséquence, il existe deux bases orthonormales directes $(\vec{I}, \vec{J})$ et $\vec{I'}, \vec{J'}$ telles que :

- dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$, Γ ait pour équation : $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$, et
- dans le repère $(O, \vec{I'}, \vec{J'})$, Γ' ait pour équation : $\alpha X'^2 + \beta Y'^2 = 1$.

On en déduit que Γ' est image de Γ dans la rotation de centre O, associée à la rotation vectorielle u définie par :
$u(\vec{I}) = \vec{I'}$, $u(\vec{J}) = \vec{J'}$.

Copyrighted material

Hidden page

Le sous ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(x, y, z)$ vérifiant $d^2(M, \mathscr{D}_1) + d^2(M, \mathscr{D}_2) = k$ est donc défini par l'équation

$$a^2x^2 + y^2 + \left(1 + a^2\right) z^2 = \left(1 + a^2\right)\left(\frac{k}{2} - a^2\right).$$

- $k < 2a^2$: $\mathscr{E} = \varnothing$,
- $k = 2a^2$: $\mathscr{E} = \{O\}$,
- $k > 2a^2$: $\mathscr{E}$ est un ellipsoïde de centre O et dont les directions principales sont définies par les axes de coordonnées.

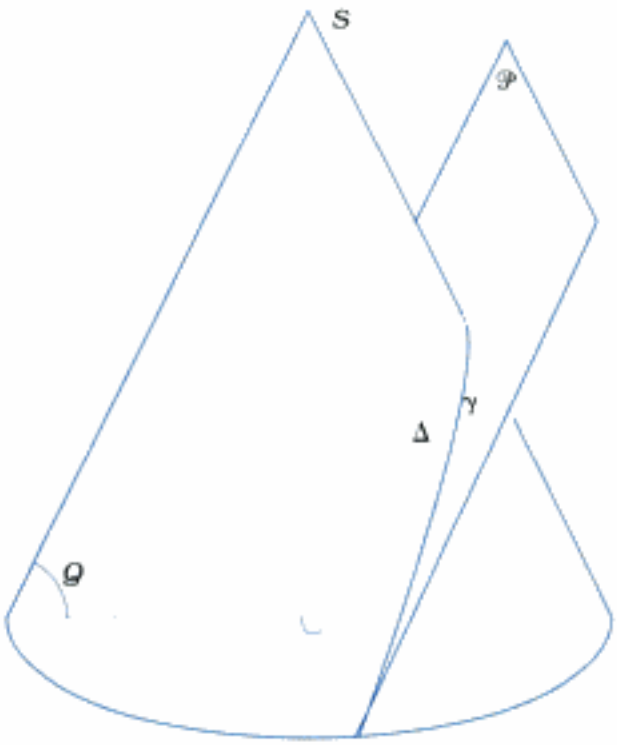
Ex. 7

Si on exclut le cas où le cône est un plan, son sommet n'est pas dans le plan de la parabole.

Soit $\mathscr{C}$ un cône de révolution et $\mathscr{P}$ un plan coupant $\mathscr{C}$ suivant une parabole γ.

L'ensemble $\mathscr{C} \cup \mathscr{P}$ admet un plan de symétrie, à savoir le plan $\mathscr{Q}$ contenant l'axe de $\mathscr{C}$ ($\mathscr{Q}$ est donc un plan méridien) et perpendiculaire à $\mathscr{P}$.

Ce plan $\mathscr{Q}$ coupe $\mathscr{P}$ suivant l'axe de γ (par raison de symétrie), en conséquence on peut aussi dire que $\mathscr{S}$ se trouve dans le plan perpendiculaire à $\mathscr{P}$ suivant l'axe Δ de γ.



Dans l'exercice proposé, l'ensemble $\mathscr{S}$ cherché est donc inclus dans le plan perpendiculaire à xOy suivant l'axe de γ ($z = 0$, $y^2 = 2px$), c'est-à-dire dans xOz, privé de l'axe Ox.

Étant donné $S\left(x_0, 0, z_0\right)$, avec $z_0 \neq 0$, un point de ce plan xOz, formons une équation du cône $\mathscr{C}$ de sommet S et de directrice γ.

Pour tout $M(x, y, z)$ une représentation paramétrique de la droite (SM) est :

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} x_0 + \lambda\left(x - x_0\right) \\ \lambda y \\ z_0 + \lambda\left(z - z_0\right) \end{pmatrix}.$$

donc $M \in \mathscr{C} \setminus \{S\} \iff \left(\frac{z_0 y}{z - z_0}\right)^2 = 2p\left(x_0 - \frac{z_0\left(x - x_0\right)}{z - z_0}\right) \quad z \neq z_0.$

Dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\mathscr{C}$ a donc pour équation :

$$z_0^2 Y^2 - 2pZ\left(x_0 Z - z_0 X\right) = 0 \quad Z \neq 0.$$

Copyrighted material

L'équation précédente représente un cône de révolution si et seulement si la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & pz_0 \\ 0 & z_0^2 & 0 \\ pz_0 & 0 & -2px_0 \end{pmatrix}$$ admet une valeur propre double.

Remarque

Il existe alors une base orthonormale $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ telle que dans le repère $(S, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, $\mathscr{C}$ ait pour équation : $\lambda\left(X_1^2 + Y_1^2\right) - \mu Z_1^2 = 0 \quad (\lambda > 0, \mu > 0)$.

Le polynôme caractéristique de A s'écrit :

$$\chi_A(\lambda) = \left(z_0^2 - \lambda\right)\left[\lambda\left(2px_0 + \lambda\right) - p^2 z_0^2\right] = \left(z_0^2 - \lambda\right)\left(\lambda^2 + 2px_0\,\lambda - p^2 z_0^2\right).$$

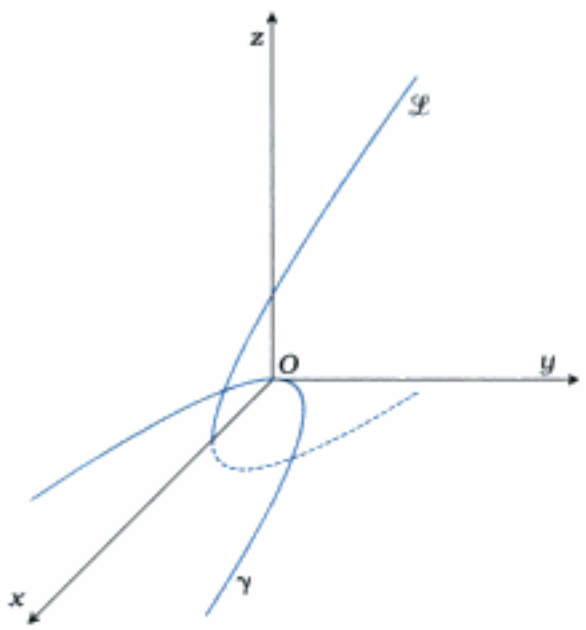
Le trinôme $\lambda^2 + 2px_0\,\lambda - z_0^2 p^2$ ne peut pas avoir de racine double (le produit de ses racines est $-z_0^2 p^2 < 0$).

En conséquence, $\chi_A(\lambda)$ admet une racine double si et seulement si z_0^2 est racine du trinôme précédent avec $z_0 \neq 0$, c'est-à-dire :

$$z_0^4 + 2px_0 z_0^2 - p^2 z_0^2 = 0 \;\; z_0 \neq 0 \quad \text{ou encore} \quad z_0^2 + 2px_0 - p^2 = 0 \;\; z_0 \neq 0.$$

Le lieu cherché est donc la parabole $\mathscr{L}$ d'équations : $y = 0 \quad z^2 = 2p\left(\frac{p}{2} - x\right)$ privée de son sommet.

Les paraboles γ et $\mathscr{L}$ sont isométriques, situées dans des plans perpendiculaires, le sommet de l'une est le foyer de l'autre.



Ex. 8

1) Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ la matrice, dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, de la forme quadratique q.

Le calcul donne $\det(A - \lambda I_3) = -\lambda\left(\lambda^2 - 2\lambda - 6\right)$ d'où les valeurs propres :

$$1 + \sqrt{7} \quad , \quad 1 - \sqrt{7} \quad \text{et} \quad 0.$$

Soit $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, formée de vecteurs propres de l'endomorphisme symétrique f_q associé à q avec :

$$\mathbb{R}\vec{I} = \operatorname{Ker}\left(f_q - \left(1 + \sqrt{7}\right)\mathrm{Id}\right) \;,\; \mathbb{R}\vec{J} = \operatorname{Ker}\left(f_q - \left(1 - \sqrt{7}\right)\mathrm{Id}\right) \text{ et } \mathbb{R}\vec{K} = \operatorname{Ker} f_q.$$

Dans cette base, on a :

$$q(\vec{u}) = \left(1 + \sqrt{7}\right)X^2 - \left(\sqrt{7} - 1\right)Y^2 \quad \text{avec} \quad \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}.$$

Copyrighted material

Donc, dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, $\mathcal{Q}$ a une équation de la forme :

$$\left(\sqrt{7}+1\right)X^2 - \left(\sqrt{7}-1\right)Y^2 + \alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0.$$

Avec $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{y} + z\vec{k} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$, la partie quadratique de l'équation est :

$$q(\overrightarrow{OM}) = 3x^2 - z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = \left(\sqrt{7}+1\right)X^2 - \left(\sqrt{7}-1\right)Y^2$$

et la partie linéaire est : $\ell(\overrightarrow{OM}) = -2x - 8y + 6z = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$.

La discussion de la nature de $\mathcal{Q}$ repose essentiellement sur la nullité ou non nullité de γ.

En observant que $\gamma = \ell(\vec{K})$, on calcule $\vec{K}$. La résolution du système :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donne : $\operatorname{Ker} f_q = \operatorname{Vect}\left(\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}\right)$.

On peut donc prendre $\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}\right)$ et il vient alors :

$$\gamma = -\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{16}{\sqrt{6}} - \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{8}{\sqrt{6}}$$

En conclusion, γ est non nul et il existe un repère orthonormal $(O', \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ dans lequel $\mathcal{Q}$ a pour équation :

$$\left(\sqrt{7}+1\right)X'^2 - \left(\sqrt{7}-1\right)Y'^2 + \frac{8}{\sqrt{6}}Z' = 0$$

$\mathcal{Q}$ est un paraboloïde hyperbolique.

2) Dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, on a :

$$\begin{aligned} q(\vec{u}) &= \left(1+\sqrt{7}\right)X^2 - \left(\sqrt{7}-1\right)Y^2 \\ &= \left(\sqrt{1+\sqrt{7}}X + \sqrt{\sqrt{7}-1}Y\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{7}}X - \sqrt{\sqrt{7}-1}Y\right) \end{aligned}$$

Ceci montre que q se décompose en le produit de deux formes linéaires indépendantes, mais ne donne pas cette décomposition dans la basre $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Avec $X = ux + vy + wz$ et $Y = u'x + v'y + w'z$, on voit aussi que q peut s'écrire comme différence de carrés de deux formes linéaires indépendantes (dans l'une ou l'autre des deux bases).

En remarquant que $z^2 - 2z(x+y) = (z-x-y)^2 - (x+y)^2$, on obtient alors :

$$q(\vec{u}) = -z^2 + 2z(x+y) + 3x^2 + 2xy$$

$$\text{donc} \quad q(\vec{u}) = -(z-x-y)^2 + (2x+y)^2 = (3x+2y-z)(x+z)$$

et on vérifie que les deux formes linéaires $\vec{u} \mapsto 3x+2y-z$ et $\vec{u} \mapsto x+z$ sont bien indépendantes. Ainsi l'équation de $\mathcal{Q}$, dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, s'écrit :

$$(3x+2y-z)(x+z) = 2x+8y-6z.$$

En considérant les sections de $\mathcal{Q}$ avec les plans $P_\lambda : 3x+2y-z = \lambda$, on obtient un premier système de génératrices $\left(\mathcal{D}_\lambda\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, avec :

$$\mathcal{D}_\lambda : \begin{cases} 3x+2y-z = \lambda \\ 2x+8y-6z = \lambda(x+z) \end{cases}$$

En effet, on a $\mathbb{R}^3 = \bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} P_\lambda$ donc $\mathcal{Q} = \mathcal{Q} \cap \mathbb{R}^3 = \bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} (\mathcal{Q} \cap P_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mathcal{D}_\lambda$.

De même, en coupant $\mathcal{Q}$ par les plans $P'_\mu : x+z = \mu$, on obtient un deuxième système de génératrices $(\mathcal{D}'_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}$, avec :

$$\mathcal{D}'_\mu : \begin{cases} x+z = \mu \\ 2x+8y-6z = \mu(3x+2y-z) \end{cases}$$

Copyrighted material

Les génératrices passant par O sont $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}'_0$:

$$\mathcal{D}_0 \ : \ \begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x + 8y - 6z = 0 \end{cases} \quad \text{de vecteur directeur } \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$$

$$\mathcal{D}'_0 \ : \ \begin{cases} x + z = 0 \\ x + 4y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{de vecteur directeur } \overrightarrow{v'} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$$

L'écart angulaire de $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}'_0$ est alors donné par :

$$\operatorname{Arccos} \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{v} \middle| \overrightarrow{v'} \right\rangle\right|}{\left\| \overrightarrow{v} \right\| \left\| \overrightarrow{v'} \right\|} = \operatorname{Arccos}\left(\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}\right).$$

Copyrighted material

Index

A

adjoint d'un endomorphisme 254
algèbre sur un corps 9
alterné (groupe –) 99
anneau principal 153
annulateur (idéal –) 155
anté-duale (base –) 32
antisymétrique (endomorphisme –) 254
application
  linéaire 13
  alternée 100
  antisymétrique 100
autoadjoint (endomorphisme –) 266
automorphisme 13
  intérieur 157

B

base 16
  anté-duale 32
  changement de – 65
  de réduction 267
  duale 31
  orthonormale 250
  directe, indirecte 268
blocs (produit par –) 64

C

canonique
  matrice – . . . . . 28 - 68
  produit scalaire euclidien – 206
caractéristique (polynôme –) 159
Cauchy-Schwarz (inégalité de –) . . . 201- 207
Cayley-Hamilton (théorème de –) 169
changement de base 65
circulant (déterminant –) 110
codimension 19
cofacteur 111
comatrice 112
combinaisons linéaires 15
complémentaire (matrice –) 112
cône
  du second degré 309
  isotrope 199
congruentes (matrices –) 197
coordonnées 16
  formes – 31
Cramer
  formules de – 115
  système de – 75
cycle 96

D

dégénérée (forme quadratique –) 204
demi-tour 273
déterminant
  circulant 110
  dans une base 102
  de Vandermonde 109
  d'un endomorphisme 106
diagonalisable . . . . . 161 - 164
dimension
  d'un espace produit 18
  finie 17
  théorème de la – 17
directe (somme –) . . . . . 18 - 21
distance à un sous-espace 222
division vectorielle 271
droite vectorielle 10
dual (espace –) 30
duale (base –) 31

E

écart angulaire 252
échange (théorème d'–) 17
élémentaire
  matrice – 63
  opération – sur matrice 69
ellipse 306
ellipsoïde 309
endomorphisme 13
  adjoint 254
  antisymétrique 254
  autoadjoint 266
  nilpotent . . . . . 14 - 29
  orthogonal 254
  symétrique 254
  trace d'un – 73
équation
  homogène 74
  linéaire 74
équivalentes (matrices –) 67
équivalents (systèmes –) 77
espace
  dual 30
  préhilbertien réel 206
  produit (dimension d'un –) 18
  vectoriel 8
  vectoriel produit 8
euclidien (produit scalaire –) 205

F

famille
  de projecteurs 24
  génératrice 15
  libre, liée 15
  presque nulle 15
  orthogonale 215
forme
  bilinéaire (matrice d'une –) 197
  bilinéaire (transposée d'une –) 196
  hermitienne 208
  linéaire 30
  p-linéaire 99
  polaire d'une forme quadratique 199
  quadratique 199
  – définie 199
  – dégénérée 204
  – non dégénérée 204
  – positive 201
  semi-linéaire 208
  sesquilinéaire 208
formes coordonnées 31
formules de Cramer 115

G

Gauss (méthode du pivot) . . . . . 28 - 76
génératrice
  famille – 15
  d'une surface 315
groupe
  alterné 99
  linéaire 14
  – d'ordre n 64
  orthogonal . . . . . 257 - 260
  spécial linéaire 107
  – orthogonal . . . . . 257 - 260
  symétrique 94

H

hermitien (produit scalaire) 209
hermitienne
  forme – 208
  matrice – 223
  norme – 210
homogène (équation –) 74
hyperbole 306
hyperboloïde 309
hyperplan . . . . . 19 - 30

Copyrighted material

I

idéal
- annulateur . . . 155
- de $\mathbb{K}[X]$ . . . 152
- engendré . . . 152
- principal . . . 152
- propre . . . 152

identité
- de Lagrange . . . 270
- de polarisation . . . 199 - 212

image . . . 13
- réciproque . . . 13

indice de nilpotence . . . 29

inégalité de
- Cauchy-Schwarz . . . 201- 207
- Minkowski . . . 202- 207

intérieur (automorphisme –) . . . 157

interpolation (polynômes d'–) . . . 26

inversion . . . 97

involution linéaire . . . 20

isomorphisme . . . 13
- réciproque . . . 14

isotrope (cône) . . . 199

itérés . . . 15

K

Kronecker (symbole de –) . . . 214

L

Lagrange
- identité de – . . . 270
- polynômes de – . . . 26

libre (famille –) . . . 15

liée (famille –) . . . 15

linéaire
- application – . . . 13
- équation – . . . 74
- forme – . . . 30

longueur d'un cycle . . . 96

M

matrice(s)
- canonique . . . 28 - 68
- colonne . . . 62
- complémentaire . . . 112
- congruentes . . . 197
- de passage . . . 65
- de permutation . . . 119
- diagonalisable . . . 164
- d'une forme bilinéaire . . . 197
- élémentaire . . . 63
- équivalentes . . . 67
- hermitienne . . . 223
- ligne . . . 62
- orthogonale . . . 260
- semblables . . . 66
- trace d'une – . . . 72
- transposée d'une – . . . 64

mineurs d'une matrice . . . 114

minimal (polynôme –) . . . 155

Minkowski (inégalité de –) . . . 202- 207

mixte (produit –) . . . 269

N

nilpotence (indice de –) . . . 29

nilpotent (endomorphisme –) . . . 14

non dégénérée (forme quadratique –) . . . 204

norme
- euclidienne . . . 207
- hermitienne . . . 211

noyau . . . 13
- -image (théorème du –) . . . 19

Copyright © 2009 Dunod

O

opérations élémentaires sur les matrices . . . 69
orthogonal
  endomorphisme – . . . 254
  groupe – . . . 257 - 260
  supplémentaire – . . . 213
  d'une partie . . . 212
orthogonale
  matrice – . . . 260
  somme directe – . . . 213
orthogonalisation de Schmidt . . . 218 - 251
orthogonaux (vecteurs –) . . . 212
orthonormale (base –) . . . 250

P

p-linéaire (application –) . . . 100
parabole . . . 306
paraboloïde . . . 309
passage (matrice de –) . . . 65
permutation(s) . . . 94
  matrice de – . . . 119
  circulaires . . . 94
perpendiculaires (sous-espaces –) . . . 252
pivot de Gauss . . . 28 - 76
polarisation (identité de –) . . . 199 - 212
polynôme
  annulateur . . . 166
  caractéristique . . . 160
  minimal . . . 155
préhilbertien réel (espace –) . . . 206
principal (idéal –) . . . 152
produit
  mixte . . . 269
  par blocs . . . 64
  scalaire canonique euclidien . . . 206 - 250
  – euclidien . . . 205
  – hermitien . . . 209
  vectoriel . . . 270
projecteur(s) . . . 20
  famille de – . . . 24
  orthogonal . . . 220
projection . . . 20
  orthogonale . . . 217
propre
  sous-espace – . . . 155
  valeur – . . . 155
  vecteur – . . . 155
Pythagore (théorème de –) . . . 215

Q

quadratique
  forme – . . . 199
  polynôme – . . . 204
quadriques réglées . . . 315

R

rang
  théorème du – . . . 27
  d'une matrice . . . 67
réflexion . . . 220
retournement . . . 273
rotation . . . 257 - 273

S

Sarrus (règle de –) . . . 103
Schmidt (orthogonalisation de –) . . . 218 - 251
semblables (matrices –) . . . 66
semi-linéaire (forme –) . . . 208
sesquilinéaire (forme –) . . . 208
signature . . . 97
similitude . . . 261
somme
  de sous-espaces . . . 18 - 21
  d'idéaux . . . 153
  directe de sous-espaces . . . 18 - 21
  – orthogonale . . . 213
sous-algèbre . . . 12

Copyrighted material

sous-espace(s)
nul . . . 10
propre . . . 155
stable . . . 150
supplémentaires . . . 23
vectoriel . . . 10
– engendré . . . 11
spécial
groupe linéaire – . . . 107
groupe orthognal – . . . 257 - 260
suite(s)
presque nulle . . . 12
récurrentes linéaires . . . 173
supplémentaire(s)
orthogonal . . . 213
sous-espaces – . . . 23
support
d'une famille . . . 15
d'une suite . . . 12
symbole de Kronecker . . . 214
symétrie . . . 20
orthogonale . . . 220
symétrique
application – . . . 100
endomorphisme – . . . 245
groupe – . . . 94
système(s)
de Cramer . . . 75
équivalents . . . 77

T

théorème
de Cayley-Hamilton . . . 169
de la dimension . . . 17
de Pythagore . . . 215
d'échange . . . 17
du rang . . . 27
noyau-image . . . 19
trace
d'un endomorphisme . . . 73
d'une matrice . . . 72
transposée
matrice – . . . 64
d'une forme bilinéaire . . . 196
transposition . . . 95
trigonalisable . . . 166

V

valeur propre . . . 155
Vandermonde (déterminant de –) . . . 109
vecteur(s)
propre . . . 155
colonne . . . 62
ligne . . . 62
orthogonaux . . . 212
vectoriel (produit –) . . . 270

Copyright

Hidden page

Bréal, l'éditeur des prépas

En français

L'épreuve littéraire



En un seul volume, une préparation complète et efficace à l'épreuve littéraire des concours des Grandes Écoles scientifiques, sur le thème au programme : résumé et analyse des œuvres au programme, étude synthétique du thème, méthodologie des épreuves, traitement d'images et d'autres textes en lien avec le thème.

20 dissertations analysées et corrigées



Vingt dissertations autour du thème au programme, complétées par une méthodologie générale illustrée. Chaque sujet comprend une analyse de l'énoncé, un plan détaillé, ainsi qu'un corrigé rédigé et de nombreux commentaires.

Connaissance d'une œuvre



Les repères essentiels sur l'œuvre et son auteur, une analyse détaillée du texte et des principaux thèmes, des compléments utiles et des prolongements vers d'autres œuvres.

La philothèque



Cette collection permet de comprendre les enjeux philosophiques de l'œuvre étudiée et les concepts qu'elle véhicule. Chaque ouvrage comprend des éléments de lecture et d'analyse de l'œuvre dans son ensemble, le texte intégral d'une partie de l'œuvre et différents outils (vocabulaire, notions, etc.).

En langues

Journal'ease Vocabulaire, Journal'ease Exercices



Les 1300 mots nécessaires pour lire et comprendre la presse anglo-saxonne, ainsi que des exercices variés pour s'entraîner à utiliser le bon mot au bon moment, à l'oral comme à l'écrit. Des outils de travail efficaces pour préparer les concours et les examens.

Existe aussi en allemand ***(Journ'allemand Vocabulaire et exercices)*****, en espagnol** ***(Journal'isimo Vocabulaire et exercices)*** **et en italien** ***(Journal'italien)*****.**

Fort en thème - Fort en version



Des exercices de thème et de version, de difficulté progressive, pour s'entraîner à ces deux techniques de la traduction.

Titres disponibles en anglais, allemand et espagnol.

Retrouvez toutes les informations nécessaires sur ces titres et d'autres ouvrages pour les prépas sur notre site : www.editions-breal.fr

Copyrighted material

Impression I.M.E. - 25110 Baume-les-Dames
Dépôt légal : août 2004
Imprimé en France - 2080337/01
Numéro imprimeur : 17634

Copyrighted material

Hidden page



Titres disponibles en deuxième année dans la filière PSI...

En Mathématiques
Analyse PSI
Algèbre et géométrie PSI

En Physique
Optique MP-PC-PSI-PT
Électromagnétisme PC-PSI
Physique des ondes PC-PSI
Thermodynamique PC-PSI
Mécanique des fluides PC-PSI
Électrotechnique PSI
Électronique PSI

En Chimie
Chimie PSI

Livres d'exercices
Mathématiques PC-PSI
Physique PSI

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour vous aider tout au long de l'année à préparer efficacement les concours.

- **Un cours complet et très clair**, illustré de nombreux exemples, pour comprendre et assimiler.
- **Des pages de méthode**, facilement mémorisables, pour acquérir les savoir-faire et les réflexes nécessaires.
- **De nombreux exercices corrigés**, variés et progressifs, pour s'entraîner régulièrement.

Les Nouveaux Précis Bréal sont **la collection de référence** pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.

BRÉAL, L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Réf. : 208.0337
ISBN : 2 7495 0393 0
www.editions-breal.fr

